DE INAEQUALITATIBUS
MOTUUM LUNARIUM

A U C T O R E

D. CAROLO WALMESLEYO

REGIAE ACADEMIAE BEROLINENSIS

E T

REGIAE SOCIETATIS LONDINENSIS SOCIO.

FLORENTIAE MDCCLVIII.

E TYPOGRAPHIO IMPERIALI.

PRAESIDUM PERMISSU.

AD LECTOREM.

Paucis te volo, amice lector, non ut Opusculi, quod tibi sisto, pretium depraedicem, quod argumenti dignitas, & Authoris sui nomen ipsum commendat, cui tot praestantissima ad maxime arduam Matheseos partem pertinentia inventa iam edita, summam famae celebritatem inter primos aevi nostri Mathematicos compararunt; sed ut de ipsa editionis ratione te admoneam, ne si quid in ea peccatum fuerit, Authori tribuas imprudens. Exemplar operis ab intimo eius amico, aequissimo tanti homi-

minis aestimatore, atque admiratore accepimus, quod, ipso Authore, & inscio, & longissime absente, ac longe aliis ab hoc studiorum genere alienissimis curis implicato, publici iuris facimus, ne tanto veluti thesauro quodam pretiosissimo diutius careat litteraria Respub., quod consilium nostrum ne is improbet, effecturum sese promisit amicus, ipse. Editione peracta deprehensi sunt nonnulli typorum errorculi, qui correctorum oculos effugerunt, quamquam ii quidem perpauci; sed iis accesserunt nonnulla, quae visa sunt praeproperae scriptionis menda in ipso exemplari nobis tradito, quae una cum iis inter errata reiecimus. Deprehensum est itidem inter schemata ex ipso exemplari iam aeri incisa esse aliquid, quod correctiuncula indigeret, & deesse id omne, quod respondebat solutionibus binis problematum nova alia methodo propositis ab Authore, &, ut arbitramur, post opus absolutum ab eodem adiectis, quarum altera habetur pag. 28. *altera* 61. *Ad supplendum illud, quod ad hanc posteriorem pertinet, satis fuit pauca*

quae-

quaedam adiicere figurae 18. *quod autem pertinet ad illam priorem, novum integrum schema requirebat, quod ex ipsa demonstrationis enunciatione deductum delineavimus. Id quidem fuisset ordine nonum, sed cum quae ibi demonstrantur, ad tertium & quartum tantummodo referantur, ac satis opportune inter utrumque locus in aere iam inciso adfuerit ipsi addendo aptus, ibidem id adiecimus cum num.* IV, *quo a num.* 4. *distingueretur, nec ordinem reliquum turbaret; ubi autem primo eius usus occurrat, idipsum itidem inter errata invenies.*

Haec nimirum monendus eras, ut si quid forte erratum sit in hisce ipsis supplendis, corrigendisque, illaesa sit authoris fama, quem de re tota consulere, ob ea, quae supra innuimus, nequaquam licuit. Quod ad calculos pertinet, qui frequentissimi occurrunt, res erat nimis operosa omnes iterum subducere, ut appareret, num quis alius in eorum expressione adsit scriptionis error in exemplari nobis communicato. Idcirco praeter praecipuos quosdam hac illac ad trutinam

nam revocatos, in quibus nullum calculatoris, vix ullum praeproperae scriptionis mendum inventum est, reliqui tantummodo cum exemplari ipso manuscripto diligenter collati sunt. Fruere iam hoc tanto munere, & raram admodum in abstrusissimo argumento summi Geometrae felicitatem, ac solutionum geometricarum simplicitatem incredibilem admirare.

DE INAEQUALITATIBUS
MOTUUM LUNARIUM

PARS PRIMA.

MUlta tradidit Newtonus & egregia ad lunae motum ſpectantia: eorum autem quaedam collegit ex Obſervationibus Aſtronomicis, alia eruit ex ipſa Theoria gravitatis, reliquorum analyſim, & demonſtrationem omnino celavit. Hic igitur ſummi illius geometrae inſiſtendo veſtigiis theoriam motus lunaris illuſtrare fuit animus, & quae minus demonſtrata reliquit, inveſtigare atque demonſtrare. Modo autem geometrico magis quam algebraico, in quantum licuit, ſequentia exponere ſtudui, & motus lunaris inaequalitates eas, quae a ſe invicem disjungi poſſunt, ſeorſim cum Newtono conſiderare. Praeterquamquod enim arduum foret, & operoſum, omnes generali unica ſolutione evolvere, atque unico calculo ſimul complecti, haecce inſuper investigandi ratio in series tandem resolvitur plerumque parum convergentes, ac propterea ad computum accuratum minus aptas. Altera autem methodo ad formulas vulgo simplicissimas ultimo devenitur. Caeterum qualemcumque posuerim in hac difficili disquisitione operam, judicio benevoli lectoris subjectam volo: facem praetulit ipse Newtonus.

PROP. I. LEMMA.

Vires quae motum lunae perturbant definire.

Sit Sol in S, (*Fig.* 1.) Terra in T, Luna in P motu suo medio describens circulum $CABD$ circa terram in centro T. Sumatur SL ad ST in duplicata ratione ST ad SP, & si attractio terrae versus solem exponatur per ST, erit SL attractio lunae versus solem. Junge PT, eique parallelam age LM occurrentem ST in M, & attractio seu vis SL resolvetur in duas SM & LM. Vis SM pars ST aequaliter trahit terram & lunam, adeoque earum situs ad invicem non mutat. Vis LM est ad gravitatem mediocrem terrae versus solem ut PT ad ST, & gravitas mediocris terrae in solem est ad gravitatem lunae in terram in ratione directa radii ST ad PT & ratione duplicata inversa temporum periodicorum terrae circa solem & lunae circa terram: ergo ex aequo erit vis LM ad gravitatem lunae in duplicata ratione temporis periodici lunae ad tempus periodicum terrae, ut 1 ad 178. 725.

Ut habeatur altera vis TM, super ST erigatur

tur perpendicularis TC secans SL in K, atque ob ingentem solis a terra distantiam est SL quamproxime parallela rectae ST, & SK quamproxime perpendicularis in TC. Ex hypothesi autem est $\overline{SP}^2 . \overline{ST}^2 :: ST . SL$, unde $SL = \frac{\overline{TS}^3}{\overline{SP}^2} = \frac{\overline{ST}^3}{\overline{ST - PK}^2} = ST + 2PK$ quamproxime; quare fit $KL = 2PK$, & PL sive $TM = 3PK$ quamproxime; est ergo vis TM ad vim LM ut $3PK$ ad TP. *Q. E. I.*

COROLL.

Hinc, quoniam in qualibet distantia terrae a sole est semper vis LM ad vim qua terra gravitat in solem ut PT ad ST, & gravitatio terrae ad solem est semper in duplicata ratione distantiae ST inverse, patet vim LM ob datam rectam PT esse inverse in triplicata ratione ejusdem distantiae ST.

Recta etiam TM est ut recta LM, adeoque in eadem ratione erit vis TM.

PROP. II. LEMMA.

Corporis recta descendentis, urgente vi multiplici ad idem centrum tendente, requiritur velocitas in loco quovis dato.

In recta EPC cadat corpus P, deque loco ejus P (*Fig.* 2.) erigatur semper perpendicularis PQ uni ex viribus ad centrum C tendentibus in loco illo proportionalis, sitque FQ linea curva quam punctum Q perpetuo tangit. In recta PQ sumatur PM vi alii centripetae proportionalis, quam non ultra altitudinem D agere ſuppono, ſitque GM curva quam punctum M perpetuo tangit: eritque quadratum velocitatis corporis in loco quovis P ut ſumma arearum $EFQP$, $DGMP$.

Etenim ſi in recta EPC capiatur pars quam minima Pp, erigaturque perpendicularis pnr curvis GM, FQ occurrens in n & r; erit incrementum velocitatis vi PQ genitum ut ipſa vis PQ & tempus, quo linea Pp deſcribitur, conjunctim. Pariter incrementum velocitatis vi PM genitum erit ut ipſa vis PM & idem tempus conjunctim. Sed ſumma velocitatum vi utraque in deſcenſu ab E ad P genitarum eſt ut ſpatium Pp directe & tempus, quo deſcribitur inverſe: ſumma igitur velocitatum & ſumma incrementorum ipſarum in ſe invicem ducantur, itemque ſummae utriuſque rationes ducantur in ſe invicem, invenieturque incrementum quadrati velocitatis totalis eſſe ut ſummam $Pp \times PQ + Pp \times PM$: adeoque quadratum velocitatis erit ut ſumma arearum $EFQP$, $DGMP$.

Eodem ratiocinio patebit, quotcumque ſupponantur vires centripetae, quadratum velocitatis corporis in P fore ſemper ut aggregatum omnium arearum modo ſupradeſcripto genitarum. $Q.E.I.$

Coroll. I.

Si vis PQ in altitudine CA ponatur aequalis P, & in alia quavis diſtantia CP ſit ut $\overline{CP}|^n$; item ſi vis PM in altitudine CA ponatur aequalis Q, & in alio quovis loco P ſit ut $\overline{CP}|^m$ per quadraturas

ras curvarum prodibit area $E\ F\ Q\ P$ aequalis $P \times \frac{\overline{CE}^{n+1} - \overline{CP}^{n+1}}{\overline{n+1} \times \overline{CA}^{n}}$, & area $D\,G\,M\,P$ aequalis $Q \times \frac{\overline{CD}^{m+1} - \overline{CP}^{m+1}}{\overline{m+1} \times \overline{CA}^{m}}$: erit igitur ex lemmate velocitas corporis in P cadentis in ratione subduplicata quantitatis $P \times \frac{\overline{CE}^{n+1} - \overline{CP}^{n+1}}{\overline{n+1} \times \overline{CA}^{n}} +$ $Q \times \frac{\overline{CD}^{m+1} - \overline{CP}^{m+1}}{\overline{m+1} \times \overline{CA}^{m}}$.

COROLL. II.

PRoducatur $P\,Q$ ad H ut sit $QH = PM$, & bisecta $P\,C$ in L, compleatur parallelogrammum $PHKL$: eritque velocitas corporis cadentis in P ad velocitatem corporis in circulo revolventis ad distantiam $C\,P$, in subduplicata ratione summae arearum $EFQP$, $D\,G\,M\,P$, ad aream $P\,H\,K\,L$, hoc est, in subduplicata ratione $P \times \frac{\overline{CE}^{n+1} - \overline{CP}^{n+1}}{\overline{n+1} \times \overline{CA}^{n}} +$ $Q \times \frac{\overline{CD}^{m+1} - \overline{CP}^{m+1}}{\overline{m+1} \times \overline{CA}^{m}}$ ad $P \times \frac{\overline{CP}^{n+1}}{2\,\overline{CA}^{n}} + Q \times \frac{\overline{CP}^{m+1}}{2\,\overline{CA}^{m}}$: quippe in hac ratione est velocitas acquisita in descensu ab E ad P, ad velocitatem quam corpus in P quiescens acquireret vi uniformi centripeta $P\,H$ ca-

cadendo a P in L; ſed haec poſterior velocitas ea eſt qua cum corpus circulum in diſtantia CP deſcribit; corpus enim cadendo per dimidium radii, urgenti vi uniformi centripeta, acquireret (uti notum eſt) eam velocitatem qua in circulo revolvitur.

PROP. III. LEMMA.

Corporis curvam deſcribentis & ad duplex centrum gravitantis requiritur velocitas in quovis curvae puncto.

Corporis in trajectoria LQ (*Fig.* 3.) moventis locus ſit Q per quem ducantur rectae TQE, SQK; & tendant vires uſquequaque ad puncta T & S: vis autem tendens ad centrum T in loco quovis Q exponatur per perpendicularem QN, ſitque FN curva quam punctum N perpetuo tangit. Pariter vis altera ad centrum S tendens in eodem loco Q exponatur per perpendicularem QC, ſitque BC curva quam punctum C perpetuo tangit. Tum reſolvatur velocitas corporis in duas partes, quarum alteram acquirere poſſet cadendo ex E ad Q vi ſola inaequabili QN, atque alteram acquirere poſſet cadendo ex K ad Q vi ſola inaequabili QC, & ducantur perpendiculares EF, KB, occurrentes curvis FN, BC, in F & B. His poſitis, dico velocitatem corporis trajectoriam LQ deſcribentis eſſe in quolibet loco Q in ratione ſubduplicata ſummae arearum $EFNQ$, $KBCQ$.

Etenim ſumatur in trajectoria punctum q proximum puncto Q, & in tangentem Qq agantur per-

perpendicula TR, SP, centrisque T, S, describantur arcus qn, qm: tum virium QN & QC partes eae, quae motum corporis accelerant, erunt respective $\frac{QN \times QR}{TQ}$ & $\frac{QC \times QP}{SQ}$ Accelerationes autem his viribus genitae erunt ut ipsae vires & tempus, quo arcus Qq describitur, inverse: hae igitur rationes in se invicem ducantur, invenieturque incrementum quadrati velocitatis esse ut $QR \times Qq \times \frac{QN}{TQ} + QP \times Qq \times \frac{QC}{SQ}$, sive, quoniam ob triangula similia TQR, Qqn, & SPQ, Qqm, fit $Qq . Qn :: TQ . QR$, & $Qq . Qm :: SQ . QP$, ut $QN \times Qn + QC \times Qm$, hoc est, ut summa incrementorum arearum $EFNQ$, $ABCQ$. Erit igitur velocitas in subduplicata ratione summae ipsarum arearum. $Q.E.I.$

Coroll. I.

Vis QN in altitudine TA sit aequalis T, & in alia quavis distantia TQ sit ut $\overline{TQ}^n$: item vis QC in altitudine SV ponatur aequalis S, & in distantia quavis alia sit ut $\overline{SQ}^\lambda$: & erit area $EFNQ$ $= T \times \frac{\overline{TE}^{n+1} - \overline{TQ}^{n+1}}{\overline{n+1} \times \overline{TA}^n}$, & area $ABCQ =$ $S \times \frac{\overline{SK}^{\lambda+1} - \overline{SQ}^{\lambda+1}}{\overline{\lambda+1} \times \overline{SV}^\lambda}$: unde habetur corporis velocilocitatis ratio. Sed etsi agat alia vis undequaque a centro alterutro, T, v. g. quae in Q exponatur per QH, & in D, ubi ejus actio supponitur incipere, per DG, sitque GH curva hoc modo genita: velocitas corporis moventis in Q erit in subduplicata ratione summae trium arearum $EFNQ$, $ABCQ$, $DGHQ$. Atque si vis QH in altitudine TA ponatur aequalis Q, & in quovis alio loco Q sit ut $\overline{TQ}^{m}$ prodibit area $DGHQ = Q \times \frac{\overline{TD}^{m+1} - \overline{TQ}^{m+1}}{\overline{m+1} \times \overline{TA}^{m}}$.

Hinc universaliter patet, quotcumque forent vires ad centra T, S, tendentes, velocitatem corporis trajectoriam describentis esse semper in subduplicata ratione summae tantumdem arearum quot sunt vires agentes.

Coroll. II.

Recedat jam centrum S in longinquum (*Fig.* 4.) ita ut sit SQ parallela ST quamproxime, & si supponamus tum corpus Q tum centrum T attrahi versus centrum S, & punctum V (*Fig.* 3 & 4.) coincidere cum T; Differentia virium, quibus urgentur corpus Q & centrum in directione MS, sit proportionalis distantiae MQ a recta TM, erigaturque perpendicularis QL proportionalis differentiae isti, ductaque ML, linea curva BC (*Fig.* 3. & 4.) jam abit in rectam ML; sunt quippe ML & QL in data ratione: ex Coroll. autem praecedente velocitas corporis Q est in subduplicata ratione summae arearum $EFNQ$, $DGHQ$, MQL.

Ad

Ad distantiam datam MZ a recta TM differentia supradicta virium ponatur aequalis R, eritque $QL = \frac{R \times MQ}{MZ}$, adeoque area $MQL = \frac{R \times \overline{MQ}^2}{2 MZ}$: datur ergo ratio velocitatis.

DE INCREMENTO VELOCITATIS LUNAE DUM TRANSIT A QUADRATURIS AD SYZYGIAS.

PROP. IV. PROBLEMA.

Invenire velocitatem lunae in quolibet orbitae suae puncto.

Ex jam inventis problema haud aegre solvitur. Quippe in Coroll. 2. prop. praeced. ponatur $n = -2$, $m = 1$, fiatque juxta propositionem primam R ad Q ut $3\,MZ$ ad TA, eritque velocitas lunae in loco Q in subduplicata ratione quantitatis $\frac{T \times \overline{TA}^2}{TE \times TQ} \overline{\times TE - TQ} + \frac{Q}{2\,TA} \times \overline{\overline{TD}^2 - \overline{TQ}^2} + \frac{3\,Q}{2} \times \frac{\overline{MQ}^2}{TA}$.

1°. Fingamus orbem lunarem esse circulum DQA (*Fig.* 5) quem vi sola terrae attractionis T describere posset, ejusque radium esse TA; quo in casu fiet $TE = 2\,TA$, $TQ = TD = TA$ (*Fig.* 2. & 4.) atque lunae velocitas in Q erit ut $\sqrt{T + 3\,Q \times \frac{\overline{MQ}^2}{\overline{TA}^2}}$. Hinc si TD sit linea quadra-

 tura.

turarum, & TA linea syzygiarum, velocitas in D erit ad velocitatem in A ut $\sqrt{T}$ ad $\sqrt{T+3Q}$, sive, quoniam S denotante tempus periodicum terrae, & L tempus periodicum lunae, est $SS.LL::T.Q$, ut S ad $\sqrt{SS+3LL}$: eamdem velocitatis rationem assignat Ill. *Machin* (Laws of the Moon's motion pag. 29.). Si extrahatur radix quadrata, erit ob exiguitatem quantitatis Q prior velocitas ad posteriorem ut 1 ad $1+\frac{3Q}{2T}$ quamproxime, vel, si velocitati mediae quae supponi potest aequalis 1 addatur & auferatur dimidium differentiae $\frac{3Q}{2T}$, ut $1-\frac{3Q}{4T}$ ad $1+\frac{3Q}{4T}$; quae posterior ratio coincidit cum ratione tradita a Newtono: fiat enim T ad Q ut $17872\frac{1}{4}$ ad 100, & $1-\frac{3Q}{4T}$ erit ad $1+\frac{3Q}{4T}$, id est, velocitas lunae in quadraturis erit ad ipsius velocitatem in syzygiis ut 11865. ad 11965. Et quia velocitas est ubivis ut $\sqrt{T+3Q\times\frac{\overline{MQ}^2}{\overline{TA}^2}}$, sive ut $1+\frac{3Q}{2T}\times\frac{\overline{MQ}^2}{\overline{TA}^2}$, quamproxime, patet differentiam inter velocitatem in quadratura & velocitatem in quolibet alio loco Q esse ut $\overline{MQ}^2$, hoc est, ut quadratum sinus distantiae lunae a quadratura, adeoque datur. At

At cum tempus quo transit luna a quadratura ad conjunctionem producitur propter motum solis in ratione revolutionis synodicae ad revolutionem periodicam, augeri debent in eadem ratione singula in singulis punctis velocitatis incrementa, ideoque in eadem ratione augetur incrementum totum in transitu lunae a quadratura ad conjunctionem: sit igitur revolutio synodica ad periodicam ut n ad 1, eritque velocitas in quadraturis ad velocitatem in syzygiis ut $1 - \frac{3nQ}{4T}$ ad $1 + \frac{3nQ}{4T}$, hoc est, ut 10973. ad 11073.

2.° Supponamus lunam moveri in circulo DQA vi $T - \frac{1}{2}Q$, & EQ esse altitudinem e qua corpus hac vi descendendo acquireret velocitatem qua luna revolvitur, eritque velocitas in quolibet puncto Q in subduplicata ratione quantitatis $\frac{T \times TA}{TE} \times \overline{TE - TA} - \frac{Q}{4TA} \times \overline{\overline{TE}^2 - \overline{TA}^2} + \frac{3Q}{2} \times \frac{\overline{MQ}^2}{TA}$: sed ex corollar. secundo prop. 2. est $\frac{T \times TA}{TE} \times \overline{TE - TA} - \frac{Q}{4TA} \times \overline{\overline{TE}^2 - \overline{TA}^2} = \frac{1}{2} T \times TA - \frac{1}{4} Q \times TA$. Est ergo velocitas in Q ut $\sqrt{T - \frac{1}{4} Q + 3Q \times \frac{\overline{MQ}^2}{\overline{TA}^2}}$: unde velocitas in quadraturis est ad velocitatem in syzygiis in hac hypothesi in ratione $\sqrt{I\,Q - \frac{1}{2}Q}$ ad $\sqrt{T + \frac{5}{4} Q}$, quae paulo minor est ratione supra inventa.

Cae-

Caeterum in hypotheſi orbitae circularis ſequenti ratione facile determinatur lunae velocitas. Ipſa enim velocitas, quam exhibet arcus quam minimus Qq dato tempore deſcriptus, reſolvatur in velocitates duas Qm, qm, parallelas rectis DT, AT, itemque vis $\overline{T+Q}$, quae deprimit lunam verſus terram, reſolvatur in duas vires, quarum altera $\overline{T+Q} \times \frac{TM}{TQ}$ agit ſecundum lineam Qm, & altera $\overline{T+Q} \times \frac{QM}{TQ}$ ſecundum lineam qm: atque ex principiis jam ſaepe adhibitis prodibit velocitas ſecundum Qm, ut $QM \sqrt{\frac{T+Q}{TQ}}$, & quoniam ex vi $\overline{T+Q} \times \frac{QM}{TQ}$ auferenda eſt vis $3\,Q \times \frac{QM}{TQ}$ quae in oppoſitum agit, reſidua erit $\overline{T-2\,Q} \times \frac{QM}{TQ}$; unde velocitas ſecundum qm erit ut $TM \sqrt{\frac{T-2\,Q}{TQ}}$. Velocitas igitur lunae in Q moventis proportionalis erit $\sqrt{T-2\,Q+3\,Q \times \frac{QM^2}{TQ^2}}$, & ea quam habet in quadratura D ad velocitatem in conjunctione A, ut $\sqrt{T-2\,Q}$ ad $\sqrt{T+Q}$. Eamdem etiam velocitatis rationem tradit Clar. *Maclaurin.* (treatiſe of fluxions art. 490.)

3.° Eſto CPS (*Fig.* 5.) vera lunae orbita quatenus abſque excentricitate moveretur, ipſam ſe ut QM in P; ſitque DQA circulus in quo ſola terrae

rae actione T revolvere posset. eritque in hoc casu velocitas lunae in quolibet puncto P in subduplicata ratione quantitatis $\frac{T\times TA}{2TP}\times\overline{2TA-TP}$ $+\frac{Q}{2TA}\times\overline{TC^2-TP^2}+\frac{3Q}{2}\times\frac{MP^2}{TA}$; hincque velocitas in quadraturis erit ad velocitatem in syzygiis in ratione subduplicata quantitatis $T\times TA\times\frac{TD-DC}{TD+DC}$ ad quantitatem $T\times TA\times\frac{TA+AS}{TA-AS}+\frac{Q}{TA}\overline{TC}^2+\frac{2Q}{TA}\overline{TS}^2$, sive ob exiguitatem quantitatum DC, AS, & Q, in subduplicata ratione $T\times\overline{1-\frac{2DC}{TD}}$ ad $T\times\overline{1+\frac{2AS}{TA}+3Q}$, sive in ratione $1-\frac{DC}{TD}$ ad $1+\frac{AS}{TA}+\frac{3Q}{2T}$ quamproxime. $Q.E.I.$

Coroll.

Si cum Newtono orbem lunae circularem supponamus, area quam describit luna in quadraturis erit ad aream descriptam in syzygiis ut $1-\frac{3nQ}{4T}$ ad $1+\frac{3nQ}{4T}$, hoc est, ut 10973. ad 11073.

DE DIAMETRIS ORBIS IN QUO LUNA SINE EXCENTRICITATE MOVERI DEBERET.

PRimum methodo Newtoniana generaliter hanc investigationem instituemus: deinde alia quaedam approximationis ratio docebitur. Ex praecedentibus patet lunae velocitatem, nulla habita ratione excentricitatis, augeri ipsiusque vim centripetam minui in transitu a quadraturis ad syzygias: unde curvior erit orbis in quadraturis, & depressior versus conjunctionem & oppositionem, magisque luna recedet a terra in priori casu quam in posteriori. Orbis igitur Lunaris formam induet quasi ellipseos CSD (*Fig* 6.) cujus centrum T occupat terra, axis major CD per quadraturas transit, axis minor TS jungit centra Terrae & Solis. Hic autem orbis, quem terra quiescente ellipsim supponimus, propter terrae motum in aliam curvam migrabit quae construi potest capiendo semper $TQ = TP$, & angulum CTQ ad angulum CTP in ratione revolutionis synodicae ad revolutionem periodicam, quam rationem pono esse n ad 1. His positis, ut habeatur differentia diametrorum quae quadraturis & syzygiis interjacent, praemittendum est lemma sequens.

PROP. V. LEMMA.

Curvae CQs *supradescriptae arcus cujuslibet quam minimi curvaturam invenire.*

SUmpto arcu quam minimo Pp, ductaque pm perpendiculari in TP, fiat angulus CTq ad an-

angulum CTp ut n ad 1, ducaturque Tq aequalis Tp, & in TQ perpendiculum qr; ducantur etiam QL, qN, tangentes curvae in punctis Q & q, & in eas agantur perpendicula TL, TN, quorum posterius productum occurrat QL in f, & existente M centro curvaturae, propter similia triangula Qqr, QTL, & similes sectores QfN, QMq, erit $Qq \,.\, Qr$ sive $Pm :: TQ$ sive $TP \,.\, QL$, & $Nf \,.\, Qf$ sive $QL :: Qq \,.\, MQ$, unde per compositionem rationum fit $Nf \,.\, Pm :: TP \,.\, MQ$, sive $MQ = \frac{TP \times Pm}{Nf}$. Acta jam recta TH ita ut TP & TH sint diametri conjugatae, notum est ex conicis summam quadratorum duarum diametrorum conjugatarum quarumlibet in ellipsi esse quantitatem datam itemque parallelogramma omnia circa diametros quasvis conjugatas esse inter se aequalia; quare erit $\overline{TP}^2 + \overline{TH}^2 = \overline{TC}^2 + \overline{TS}^2$, & si L denotet perpendiculum demissum a centro T in tangentem ductam a puncto P, erit $L \times TH = TC \times TS$, unde $L = \frac{TC \times TS}{\sqrt{\overline{TC}^2 + \overline{TS}^2 - \overline{TP}^2}}$,

& $pm = \frac{TC \times TS \times Pm}{\sqrt{\overline{\overline{TC}^2 + \overline{TS}^2} \times \overline{TP}^2 - \overline{TC}^2 \times \overline{TS}^2 - \overline{TP}^4}}$;

& quoniam est angulus QTq ad angulum PTp ut n ad 1,

prodibit $TL = \frac{n \times TC \times TS \times TP}{\sqrt{\overline{nn-1} \times \overline{TC}^2 \times \overline{TS}^2 + \overline{\overline{TC}^2 + \overline{TS}^2} \times \overline{TP}^2 - \overline{TP}^4}}$.

Po-

Ponatur P aequalis fractionis hujus denominatori $\sqrt{\overline{nn-1}\times\overline{TC}^2\times\overline{TS}^2+\overline{\overline{TC}^2+\overline{TS}^2}\times\overline{TP}^2-\overline{TP}^4}$, eritque fluxio perpendiculi TL, id est, $Nf = \frac{n\times TC\times TS\times Pm}{P^3}\times\sqrt{\overline{nn-1}\times\overline{TC}^2\times\overline{TS}^2+\overline{TP}^4}$, adeoque $MQ = \frac{P^3\times TP}{n\times TC\times TS\times\sqrt{\overline{nn-1}\times\overline{TC}^2\times\overline{TS}^2+\overline{TP}^4}}$.

Coincidat TP cum TC, eritque $P = n\times TC\times TS$, & radius curvaturae in C aequalis $\frac{n^2\times TC\times TS}{\overline{TC}^2+\overline{nn-1}\times\overline{TS}^2}$. Iterum coincidat TP cum TS, rursumque erit $P = n\times TC\times TS$, atque radius curvaturae in s (angulo scilicet CTs existente ad angulum CTS ut n ad 1, & $Ts = TS$) fit aequalis $\frac{n^2\times\overline{TC}^2\times TS}{\overline{TS}^2+\overline{nn-1}\times\overline{TC}^2}$: quamobrem radius curvaturae in C est ad radium curvaturae in s ut $\overline{TS}^3+\overline{nn-1}\times\overline{TC}^2\times TS$ ad $\overline{TC}^3+\overline{nn-1}\times TC\times\overline{TS}^2$. *Q. E. I.*

PROP. VI. PROBLEMA.

Investigare proportionem axium orbis, in quo Luna sine excentricitate revolveret.

Vis centripeta est semper directe ut quadratum velocitatis, & inverse ut circuli trajectoriam osculantis chorda illa quae transit per centrum virium; & quoniam chorda, quae curvae est perpendicularis, evadit diameter circuli, sequitur radios curvaturae orbis lunaris in punctis syzygiarum & qua-

quadraturarum esse inter se ut quadrata velocitatis lunae in illis punctis directe & vires quibus luna urgetur inverse. Sit 1 vis qua lunam terra attrahit in media distantia, & 2φ pars illa vis solaris quae deprimit lunam versus terram & quae augetur ut lunae distantia a terra; sit m ad 1 ut area quam luna describit in syzygiis ad aream descriptam in quadraturis, eritque lunae velocitas in syzygiis ad ipsius velocitatem in quadraturis ut $m \times TC$ ad TS: gravitas autem lunae est ad ipsius gravitatem in quadraturis ut $\frac{1}{\overline{TS}^2} - 4\varphi \times TS$ ad $\frac{1}{\overline{TC}^2} + 2\varphi \times TC$, sive ut $\overline{TC}^2 - 4\varphi \times \overline{TC}^2 \times \overline{TS}^3$ ad $\overline{TS}^2 + 2\varphi \times \overline{TS}^2 \times \overline{TC}^3$; radius igitur curvaturae orbis lunaris in syzygiis est ad radium ejusdem curvature in quadraturis ut $m^2 + 2m^2\varphi \times \overline{TC}^3$ ad $1 - 4\varphi \times \overline{TS}^3$, & hanc rationem aequando rationi lemmate praecedenti inventae, & pro TC scribendo $1 + x$, & $1 - x$ pro TS, quoniam φ & x sunt quantitates exiguae, emerget $4m^2x + 4x - m^2n^2x - n^2x = m^2n^2 - n^2 + 2m^2n^2\varphi + 4n^2\varphi$, & cum Newtono ponendo m ad 1 ut $1 + \frac{3\varphi n}{2}$ ad $1 - \frac{3\varphi n}{2}$ uti in prop. 4. determinavimus, erit $m^2 = 1 + 6\varphi n$ quamproxime, & prodibit $x = \frac{3\varphi n^2 \times \overline{n+1}}{4 - n o}$.

Hincque cum in motu lunae sit n ad 1 ut $29^d\ 12^h\ 44'$. ad $27^d\ 7^h\ 43'$, prodit $\frac{3\varphi n^2 \times \overline{n+1}}{4-nn} = \frac{1}{138.8}$, & TC ad TS ut 69. 9 ad 68. 9, sive ut 70. ad 69, uti determinavit Newtonus: in hac ergo ratione est distantia lunae a terra in quadraturis ad ipsius distantiam in syzygiis. *Q. E. I.*

Coroll. I.

Designet jam L revolutionem lunae periodicam, M revolutionem synodicam, S revolutionem solis, D differentiam revolutionum solis & lunae, eritque $n = \frac{M}{L} = \frac{S}{D}$, $2\varphi = \frac{LL}{SS}$, & $2\varphi n^2 = \frac{LL}{DD}$, fitque $x = \frac{3L}{2} \times \frac{M+L}{4DD-SS}$, unde oritur ista proportio, *Differentia axium orbis lunaris est ad ipsorum summam ut* $3L \times \frac{M+L}{2}$ *ad* $DD - SS$, quemadmodum se ex methodo Newtoniana collegisse affirmat Clar. *Machin.*

Coroll. II.

In hacce solutione usurpavimus cum Newtono velocitatis lunaris incrementum illud quale foret in orbita circulari; sed & si orbita lunaris elliptica supponatur, quod magis ad veritatem accedit, & ea adhibeatur velocitas quam tertia parte prop. 4. determinavimus, seposita excentricitatis consideratione, parum diversa erit ratio diametrorum ab ea supra inventa. In hac enim hypothesi velocitas

citas lunae in quadraturis eſt (per prop. 4.) ad ejuſdem velocitatem in ſyzygiis, ſecluſo terrae motu, ut (*Fig.* 5.) $1 - \frac{DC}{TD}$ ad $1 + \frac{AS}{TA} + \frac{3Q}{2T}$, ſive, ponendo $TC = 1 + x$, $TS = 1 - x$, $T = 1$, $Q = 2\varphi$, ut $1 - x$ ad $1 + x + 3\varphi$, atque harum velocitatum differentia aucta in ratione temporis ſynodici ad tempus periodicum, hoc eſt, in ratione n ad 1, & addita velocitati qua luna movetur in quadraturis, efficit ut velocitas in quadraturis jam ſit ad velocitatem in ſyzygiis ut $1 - x$ ad $1 - x + 2nx + 3\varphi n$; deinde facto ratiocinio ut in hac propoſitione, & computo inito, prodit $x = \frac{3\varphi n^2 \times \overline{n+1}}{4 - n^2 \times 2n - 1}$, id eſt, in caſu motus lunae, $x = \frac{1}{129.54}$, adeoque TC ad TS ut 65. 27. ad 64. 27.

Caeterum, quoniam orbita lunaris eſt excentrica contra hypotheſim noſtram, ideo proportio diametrorum mediocrium quam aſſignavimus a vero aliquatenus aberrare poteſt. Halleius quidem olim rationem $45\frac{1}{2}$ ad $44\frac{1}{2}$ cum phoenomenis lunaribus fere congruere ſtatuit.

SCHOLIUM.

Ut obtineatur ratio diametrorum orbis lunaris, ſequens forte adhiberi poteſt approximatio. Exhibeat circulus DQA (*Fig.* 5.) orbitam quam luna, ſi attractione ſolis non agitaretur, circa terram in centro T deſcriberet: ſumatur arcus quam minimus Qq, & in lineam quadraturarum TD agantur normales QM, qn. Si luna circulum DQA aequabili motu describeret, vi aequali ad centrum tenderet & a centro recederet; at quoniam in transitu a quadraturis ad syzygias acceleratur ejus motus propter vim solis, vis centrifuga augebitur in ratione duplicata velocitatis, ideoque (per prop. 4.) exponetur per $1 + 6\varphi \times \frac{\overline{QM}^2}{\overline{TQ}^2}$, a qua si auferatur attractio lunae ad terram, nempe 1, restabit vis $6\varphi \times \frac{\overline{QM}^2}{\overline{TQ}^2}$: sed etiam vis solis sollicitans lunam secundum radium TQ duplex est, altera aequalis 2φ, altera aequalis $6\varphi \times \frac{\overline{QM}^2}{\overline{TQ}^2}$. Harum trium virium prima & tertia minuunt gravitatem lunae versus terram in transitu a quadraturis ad syzygias, quo efficitur ut curvior sit orbis, adeoque & luna longius recedat a terra in quadraturis quam in syzygiis. Secunda vis 2φ crescit in ratione distantiae a terra, ideoque & ipsa etiam curvitatem orbis & distantiam lunae in quadraturis adhuc augebit, minuetque in syzygiis: differentia igitur diametrorum quam quaerimus pendet ex summa trium virium praedictarum. His positis, acceleratio lunae secundum radium TQ est ut vis accelerans & tempus conjunctim, id est, si arcus Qq exponat temporis particulam, ut $12\varphi \times \frac{\overline{QM}^2 \times Qq}{\overline{QT}^2} + 2\varphi \times Qq$, sive quoniam est $Qq . Mn :: TQ . QM$, ut $12\varphi \times \frac{QM \times Mn}{TQ} + 2\varphi \times Qq$, hincque summa accelera-

tio-

tionum genita quo tempore luna describere posset arcum DQ, hoc est, lunae velocitas qua ad centrum accedit, est ut $12\,\phi \times \frac{DQM}{TQ} + 2\,\phi \times DQ$ vel $8\,\phi \times DQ - 6\,\phi \times \frac{QM \times TM}{TQ}$. Spatium autem quo luna tempore quam minimo ad terram accedit est ut velocitas & tempus conjunctim, adeoque ut $8\,\phi \times DQ \times Qq - 6\,\phi \times \frac{QM \times TM \times Qq}{TQ}$: spatium igitur totum quo luna ad terram accedit dum arcum DQ describere posset, est ut $4\,\phi \times \overline{DQ}^2 - 3\,\phi \times \overline{QM}^2$, quod in syzygia A fit $4\,\phi \times \overline{DA}^2 - 3\,\phi \times \overline{TA}^2$. Coeant jam puncta Q & D, eritque in hoc casu $QM = QD$, & spatium ut $\phi \times \overline{DQ}^2$. Si vis sola extranea $2\,\phi$ in lunam ageret, juxta idem ratiocinium spatium hac vi secundum radium percursum foret ut $\phi \times \overline{DQ}^2$; hoc autem norunt Geometrae esse ipsum spatium quo caderet corpus vi $2\,\phi$, dum describeret arcum quam minimum DQ vi centripeta aequali 1. Spatium igitur $4\,\phi \times \overline{DA}^2 - 3\,\phi \times \overline{TA}^2$ est ipsum quo luna accedere debet ad terram tempore quo describere potest quadrantem DA. Hoc autem spatium augeri debet propter motum solis in ratione duplicata n ad 1, quoniam unaquaeque particula temporis producitur in ratione n ad 1. Itaque ponendo radium $TQ = 1$, fit $4\,\phi\, n^2 \times \overline{DA}^2 - 3\,\phi\, n^2 \times \overline{TA}^2 = \frac{1}{44.54}$, cujus dimidium $\frac{1}{89.08}$ si radio TQ addatur & ab eo auferatur, prodit axis major mediocris ad axem minorem mediocrem ut ut 45 ad 44 quamproxime, fere ut suppofuit Halleius.

DE VARIATIONE LUNAE.

PROP. VII. LEMMA.

Dentur motus duo angulares, quorum alter sit uniformis, alter autem crescat in duplicata ratione sinus distantiae a puncto dato, oporteatque hos motus inter se conferre ac determinare.

EX centro motuum T (*Fig.* 7.) describatur circulus HBR & ellipsis HAR cujus axis major HR transeat per punctum H a quo incipit motus variabilis; tum ducto radio quolibet TD a centro ad corpus, motum secante ellipsim in P, si motuum summa exponatur per aream circuli HTD, motus uniformis exponetur per aream ellipseos HTP, & motus variabilis per aream HDP inter circulum & ellipsim contentam. Producatur enim TD ut iterum occurrat circulo in d; sit TA semiaxis minor, occurratque circulo in B; ex D & P in TH agantur perpendiculares DK, PG, quarum PG utrinque producta occurrat circulo in F & f, ducaturque Tq abscindens sectorem quam minimum DTq & occurrens ellipsi in p: eritque sector DTq ad sectorem PTp ut $\overline{TD}^2$ ad $\overline{TP}^2$, & $DTq - PTp$ sive $DPpq$ ad PTp ut $\overline{TD}^2 - \overline{TP}^2$ ad $\overline{TP}^2$, sed $\overline{TD}^2 - \overline{TP}^2 = DP \times Pd = FP \times Pf = \overline{FG}^2 - \overline{PG}^2 =$ (quia est $FG.PG::TB.TA$, adeoque $\dfrac{\overline{FG}^2 - \overline{PG}^2}{\overline{PG}^2}$.

$\overline{PG}^2 :: \overline{TB}^2 - \overline{TA}^2 . \overline{TA}^2)\ \overline{\overline{TB}^2 - \overline{TA}^2} \times \frac{\overline{PG}^2}{\overline{TA}^2}$; fit igitur $DPpq . PTp :: \overline{\overline{TB}^2 - \overline{TA}^2} \times \frac{\overline{PG}^2}{\overline{TA}^2} . \overline{TP}^2$: detur ſector PTp, atque erit ſemper areola $DPpq$ ut $\frac{\overline{PG}^2}{\overline{TP}}$ ſive ut $\overline{DK}^2$, id eſt, ut quadratum ſinus diſtantiae corporis a loco H. Patet igitur quod, ſi area circularis HTD exhibet ſummam motuum, area elliptica HTP exhibebit motum totum uniformem, & area HDP, cujus incrementum eſt in duplicata ratione ſinus arcus HD, exhibebit motum totum praefata lege variabilem.

Eodem modo demonſtrabitur quod, ſi motus angularis variabilis incipiat decreſcere a puncto H in duplicata ratione ſinus diſtantiae ab illo puncto, & centro T deſcribatur ellipſis cujus axis minor ſit TH & axis major TI locetur ſuper lineam TB, & radius TD occurrat ellipſi HI in L, area ellipſeos HTL exhibebit motum illum uniformiter continuatum quem corpus habebat in puncto H, area HLD inter ellipſim & circulum exhibebit motum ablatum, & area circularis HTD motum reliquum. *Q. E. I.*

Theorema hoc commemorat D. *Machin*, eoque multoties commodiſſime uſus eſt ad motus lunares definiendos.

C o r o l l. I.

Ex eo quod areae in ellipſi deſcriptae ſunt temporibus proportionales, patet radios omnes el-

li-

lipseos esse inter se reciproce in subduplicata ratione motus horarii circa centrum T.

COROLL. II.

Quoniam motus medii sunt ut tempora, & haec tempora sunt ut areae ellipticae uniformiter descriptae, motus medii qui respondent areis sive temporibus HTA, HTP, sunt ut ipsae eaedem areae, sive ut areae HTB, HTF, vel ut anguli HTB, HTF: motus igitur medius tempore HTP descriptus est angulus HTF, & motus verus eodem tempore descriptus est angulus HTP, & horum angulorum tangentes sunt ad se invicem ut FG ad PG sive ut TB ad TA, eorumque differentia FTD est angulus aequationis motus.

COROLL. III.

Quoniam est $FP \,.\, PG :: BA \,.\, TA$, & in TD acto perpendiculo Fr, $Fr \,.\, FP :: TG \,.\, TP$, fit $Fr \,.\, PG :: BA \times TG \,.\, TA \times TP$, unde $Fr = \frac{BA \times TG \times PG}{TA \times TP}$; adeoque est Fr ut $\frac{TG \times PG}{TP}$ sive, si ellipsis parum differat a circulo, ut $TK \times DK$ vel $TG \times FG$ quamproxime, id est, ut sinus duplae distantiae puncti D vel F a puncto H vel B. Et quia factum $TK \times DK$ fit maximum ubi $TK = DK$, ideo angulus FTD, sive aequatio motus, fit maximus ubi angulus HTD est 45°. quamproxime.

Ubi autem angulus HTD est 45°, fit $TG = PG$, & $2\, TG \times PG = \overline{TP}^2$, hincque $Fr = \frac{BA \times TP}{2\, TA}$;

sed

ſed $TP = TD - DP = TD - Pr$ quamproxime, eſtque $Pr = Fr$, adeoque obtinetur $Fr = \frac{BA \times TD}{2\,TA + BA}$: unde ſinus anguli FTD, id eſt, aequationis maximae, eſt ad radium ut BA ad $2\,TA + BA$, hoc eſt, ut differentia axium ellipſeos ad eorum ſummam.

C o r o l l. IV.

Item ſi ellipſis parum differt a circulo, erit DP ut quadratum ſinus diſtantiae puncti D a puncto H. Quippe propter triangula ſimilia FDP, TDK, eſt $DP . FP :: DK . TD$, adeoque eſt DP ut $FP \times DK$; ſed eſt FP ad FG ſive DK quamproxime, in data ratione, unde erit DP ut $\overline{DK}^2$.

PROP. VIII. PROBLEMA.

Variationem lunae invenire.

Ea variationis pars quae oritur ex forma elliptica orbitae lunaris ſic habetur. Movere ſupponatur luna P (*Fig.* 8.) in ellipſi CPS & deſcribere areas temporibus proportionales circa terram in centro T ellipſeos, & ſi radio TC deſcribatur circulus CB & per punctum P agatur PL perpendicularis in TC & occurrens circulo in M, patet motum lunae medium & motum verum ſeu potius *ellipticum* exponi reſpective per areas CTM & CTP, ſive per angulorum CTM & CTP tangentes ML, PL, quae ſunt ad ſe invicem ut 70. ad 69.

Sed acceleratur descriptio areae in transitu lunae a quadraturis ad syzygias, indeque oritur altera pars variationis. Est autem haec acceleratio areae in duplicata ratione (per prop. 4.) sinus distantiae lunae a quadratura proxima, quare area quam luna circa terram describit exhiberi potest per aream circuli (per prop. 7.) & area, quam describeret si nulla foret acceleratio, exhiberi potest per aream ellipseos, cujus axis major radio circuli aequalis est ad minorem (per prop. 4. & Coroll. 1. prop. 7.) ut $\sqrt{11073}$ ad $\sqrt{10973}$ sive ut 69. ad 68.6877. In hac igitur ratione est tangens motus lunae *elliptici* ad tangentem motus veri (per Coroll. 2. prop. 7.): erat autem tangens motus medii lunae ad tangentem motus *elliptici* ut 70. ad 69, adeoque tangens motus medii erit ad tangentem motus veri ut 70. ad 68.6877: unde, dato motu medio lunae, habetur ipsius motus verus, & eorum motuum differentia quae est ipsa variatio quaesita.

Sit motus medius, v. g. 45°, & prodit motus verus 44°. 27′. 28″, qui subductus de 45° relinquit variationem maximam 32′. 32″, quae ob productionem temporis propter motum solis debet augeri in ratione revolutionis lunaris synodicae ad revolutionem periodicam, adeoque jam evadit 35′. 10″. Si loco rationis 70. ad 69. adhiberetur ea 65. 27 ad 64. 27 quam in Coroll. prop. 6. determinavimus, servata ratione $\sqrt{11073}$ ad $\sqrt{10973}$, prodiret variatio maxima 34′. 20″ quae aucta in ratione temporis synodici ad tempus periodicum fit 37′. 7″. *Q. E. I.*

Co-

COROLL.

VAriationem maximam, qualis eſt in mediocri diſtantia ſolis a terra, in hac propoſitione aſſignavimus; in aliis diſtantiis creſcit vel minuitur in ratione duplicata temporis revolutionis ſynodicae lunaris (dato anni tempore) directe & triplicata ratione diſtantiae inverſe. Sunto L & S tempora periodica lunae & ſolis, M tempus revolutionis ſynodicae lunaris in mediocri diſtantia a ſolis a terra, & angulus eo tempore deſcriptus $360° + A$; m tempus revolutionis ſynodicae in alia qualibet diſtantia x, & angulus eo tempore deſcriptus $360° + B$, eritque $L . S :: A . 360° + A$, & $S - L . L :: 360°$. $A = \frac{360° \times L}{S - L}$: eſt etiam $A . B :: x^2 . a^2$, atque $M . m :: 360 + A . 360 + B$; hiſque rationibus rite collatis, prodit $M . m :: S . S - L + \frac{a^2 L}{x^2}$ ſive, ponendo $x = a \mp c$, atque $x^2 = a^2 \mp 2 a c$ quamproxime, $M . m :: S . S \mp \frac{2 c L}{a} :: 1 . 1 \mp \frac{2 c L}{a S}$, & $M^2 . m^2 :: 1 . 1 \mp \frac{4 c L}{a S}$. Hincque ſi ſolis excentricitas ſit ad ſemidiametrum tranſverſam orbis magni ut $16 \frac{15}{16}$ ad 1000, erit variatio maxima in Apogaeo ſolis 33′ 16″, & in ejus Perigaeo 37′. 12″. Sin autem variatio maxima in mediis diſtantiis ſtatuatur 37′. 7″, prodibit variatio maxima in Apogaeo ſolis 35′.6″, in Perigaeo 39′. 16″. In aliis diſtantiis eadem ratione obtinetur.

METHODUS ALTERA INVESTIGANDI VARIATIONEM LUNAE.

Velocitas lunae in quolibet loco Q (*Fig.* 3.) est ex prop. 4. generatim proportionalis quantitati $\sqrt{\frac{T\times\overline{TA}^2}{TE\times TQ}\times\overline{TE-TQ}+Q\times\frac{\overline{TD}^2-\overline{TQ}^2}{2TA}+\frac{3Q}{2}\times\frac{\overline{MQ}^2}{TA}}$, sive, ducendo in $\sqrt{2}$, & ponendo $TA=1, T=1, Q=2\phi$, quantitati $\sqrt{\frac{2}{TQ}\times\overline{TE-TQ}+2\phi\times\overline{TD}^2-\overline{TQ}^2+6\phi\times\overline{MQ}^2}$. Et si supponamus velocitatem eam, quae pendet ab altitudine TE esse eam, qua luna describeret circulum CRA, cujus radius TC sive TA est medium proportionale arithmeticum inter semiaxes TD, TS ellipseos DQS, quam luna absque excentricitate describere deberet, erit $TE=2$, adeoque velocitas praedicta lunae in Q est ut $\sqrt{\frac{2}{TQ}-1+2\phi\times\overline{TD}^2-\overline{TQ}^2+6\phi\times\overline{MQ}^2}$. Ponatur $\frac{2}{TQ}-1=AA$, & extracta radice velocitas erit ut $A+\phi\times\frac{\overline{TD}^2-\overline{TQ}^2}{A}+3\phi\times\frac{\overline{MQ}^2}{A}$: sed ea velocitatis pars quae generatur vi ϕ, augeri debet in ratione revolutionis synodicae ad periodicam, hoc est, in ratione n ad 1; velocitas igitur erit ut $A+n\phi\times\frac{\overline{TD}^2-\overline{TQ}^2}{A}+3n\phi\times\frac{\overline{MQ}^2}{A}$. Existente autem $TR=1$, est $\overline{TD}^2=1+2DC$, $\frac{TQ}{TR}=$

$TR \mp RQ = 1 + DC \times \overline{1 - 2\,\overline{RN}^2}$ secante scilicet radio TQ circulum in R, & ductis in TD perpendiculis QM, RN (*Fig.* 9.), adeoque $AA = \frac{1 - DC \times \overline{1 - 2\,\overline{RN}^2}}{1 + DC \times \overline{1 - 2\,\overline{RN}^2}}$, atque $A = 1 - DC \times \overline{1 - 2\,\overline{RN}^2}$ quamproxime; unde neglectis terminis ductis in $\overline{DC}^2$ & $\varphi \times DC$, evadit terminus $n\varphi \times \frac{\overline{TD}^2 - \overline{TQ}^2}{A} = 0$, ac proinde velocitas ut $1 - DC + 2\,DC \times \overline{RN}^2 + 3\,n\varphi \times \overline{RN}^2$. Jam si p sit perpendiculum ductum a centro T in tangentem ductam a puncto Q, velocitas praedicta in orbita erit ad velocitatem perpendicularem radio TQ ut TQ ad p, & hac posterior velocitas applicata ad radium TQ dabit velocitatem angularem, quae proinde erit $\overline{1 - DC + 2\,DC \times \overline{RN}^2 + 3\,n\varphi \times \overline{RN}^2} \times \frac{p}{\overline{TQ}^3}$ & cum sit $p = \frac{TD \times TS}{\sqrt{\overline{TD}^2 \times \overline{TS}^2 - \overline{TQ}^2}} = 1 + DC \times \overline{1 - 2\,\overline{RN}^2}$, & $\frac{p}{\overline{TQ}^3} = 1 - DC \times \overline{1 - 2\,\overline{RN}^2}$, hic motus angularis circa centrum T sit $1 - 2\,DC + 4\,DC \times \overline{RN}^2 + 3\,n\varphi \times \overline{RN}^2$; & summa horum motuum, sumpta fluente in circulo CRA, erit pro quadrante CA, exhibente D circumferentiam totam $\overline{1 - 2\,DC} \times \frac{D}{4} + \overline{4\,DC + 3\,n\varphi} \times \frac{D}{8}$, & ubi sit $CR = \frac{DA}{2}$, id est, in in octantibus, hic motus verus erit $\overline{1 - 2DC} \times \frac{D}{8} + \overline{4DC + 3n\varphi} \times \overline{\frac{D}{16} - \frac{1}{4}}$; motus autem medius in hoc casu est semissis motus prioris, id est, $\overline{1 - \frac{DC}{8}} \times \frac{D}{8} + \overline{4DC + 3n\varphi} \times \frac{D}{16}$: unde differentia motuum, sive aequatio motus in Octantibus est ad motum medium 45° ut $DC + \frac{3n\varphi}{4}$ ad $\overline{1 - 2DC} \times \frac{D}{8} + \overline{4DC + 3n\varphi} \times \frac{D}{16}$, adeoque haec aequatio est aequalis $\overline{DC + \frac{3n\varphi}{4}} \times \frac{8 \times 45^\circ}{D}$ quamproxime, quae, posito $DC = \frac{1}{139}$, ob $TD \,.\, TS :: 70.69$, fit $32'.32''$, uti priori modo inveneramus.

DE MOTU NODORUM ORBIS LUNAE.

Designet NQP (*Fig.* 9.) orbem lunae, cujus projectio in plano Eclipticae sit NRS, & NT linea intersectionis planorum orbis lunaris & Eclipticae: esto Pp arcus dato tempore quam minimo descriptus; a puncto P in planum Eclipticae demittatur perpendiculum PR, & a puncto R perpendiculum RK in lineam quadraturas jungentem quam supponimus esse projectionem lineae TQ in plano Eclipticae; esto terra in T & TS linea centra terrae & solis conjungens. His positis, patet vis

vis solaris eam partem quae exponitur per lineam PT agere secundum planum orbis lunaris, ac proinde situm plani non mutare, adeoque nec positionem nodorum: altera autem vis solaris pars proportionalis $3\,RK$ agit secundum directionem plano Eclipticae & lineae ST parallelam, proindeque lunam ab orbis sui plano deflectit & motum nodorum generat: hunc motum tum in orbe circulari tum in orbe elliptico cum Newtono investigabimus.

PROP. IX. PROBLEMA.

Invenire motum nodorum lunae in orbe circulari.

Curva NQP sit circulus, NTM linea nodorum, ex N agatur NH perpendicularis in TP, & sit pm duplum spatii quod luna impellente vi $3\,RK$ describeret tempore quo describit arcum Pp, jungantur puncta P, m, & luna movebitur in plano intersecante planum NQP in angulo aequali illi quem efficit planum $mPnT$ cum eodem plano NQP, nodo N translato in n, & intersectione planorum PQN & mPn transeunte per lineam PT: in plano $mPnT$ ducatur HL parallela rectae Pm & secet planum Eclipticae in L; jungantur puncta L, N, & quia planum NHL parallelum est plano Pmp, & linea pm est in plano parallelo plano Eclipticae, similia sunt triangula Ppm & NHL, unde est $Pp.\ pm :: NH.\ NL$; & si in lineam nodorum NM agatur perpendicularis SZ, triangula STZ & NLn erunt similia, adeoque erit $ST.\ SZ ::$

NL

$NL . Nn$, unde per compofitionem rationum prodit $Pp \times ST . pm \times SZ :: NH . Nn$; eft igitur $Nn = \frac{pm \times NH \times SZ}{Pp \times ST}$. Sed datur ST, & dato tempore datur Pp, & pm eft ut RK; quare erit motus nodorum ut $RK \times NH \times SZ$, & fi nulla habeatur ratio inclinationis, ut $PK \times NH \times SZ$. *Q.E.I.*

Quoties aliqua ex his tribus rectis in contrariam partem tendit, motus regreffivus in progreffivum mutari debet.

Coroll. I.

Si arcus NP fuerit 90. graduum, angulus NHL coincidet cum angulo NTL: ergo cum luna diftet a nodo 90. gradibus, angulus pPm fit aequalis motui nodorum qui eo in cafu proportionalis eft contento $RK \times NT \times SZ$, vel, ob datam NT, facto $RK \times SZ$. Et fi planum orbis lunaris coincidere fupponatur cum plano Eclipticae, fit $RK = PK = SZ$, unde motus nodorum erit ut $\overline{SZ}^2$, arcu NP exiftente 90°. Quiefcunt nodi ubi in fyzygiis verfantur ob $SZ = o$.

Coroll. II.

Coincidat TN cum TQ, id eft, fint nodi in quadraturis, & fiet NH vel QH (*Fig.* 10.) aequalis PK, & SZ aequalis ST, & motus nodorum ex propofitione erit ut $RK \times PK \times ST$, five ponendo C pro cofinu inclinationis plani orbis lunaris ad planum Eclipticae, ut $C \times \overline{PK}^2$, & fepofita inclinationis confideratione, ut $\overline{PK}^2$.

Co-

COROLL. III.

Iisdem manentibus ac in Coroll. praeced. sit luna in conjunctione S, eritque angulus SPm (ex Cor. 1°.) aequalis motui nodorum; sed, quia est Sm duplum spatii quod luna vi $3ST$ percurrere posset tempore quo describit, arcum PS, angulus SPm est ad duplum anguli SPr, existente Pr perpendiculari in ST, id est, ad angulum PTS, ut vis $3ST$ ad lunae gravitatem; hoc est, motus horarius nodorum eo in casu est ad motum horarium lunae ut $\frac{3}{178.725}$ ad 1 sive ut 1 ad 59.575: adeoque cum motus horarius lunae in orbe suo sit 32.941057. minuta prima, motus horarius nodorum erit $33''.10'''.33''''$. Sed si ratio habeatur inclinationis, cujus cosinus sit ad radium ut C ad 1, erit vis prior ad posteriorem ut 1 ad $C \times 59.575$; ideoque si inclinatio orbis lunaris ad Eclipticam, dum nodi versantur in quadraturis, ponatur esse $5°. 1'$, erit C ad 1 ut 525. ad 527, & motus nodorum evadet $33''. 3'''$. Hicque est motus nodi celerrimus; nam ubi luna versatur in syzygiis, motus ille est semper ut $ST \times \overline{SZ}^2$ ob $RK = ST$, & $NH = SZ$ (*Fig.* 10.), ac propterea, ubi nodi sunt in quadraturis, ut $\overline{ST}^3$.

COROLL. IV.

Iisdem manentibus, si sol quiesceret & Inclinatio orbis lunaris maneret eadem tempore quo luna periodum suam absolveret, patet ex coroll. 2. motum

 no-

nodi fore proportionalem quadrato ſinus diſtantiae lunae a quadratura proxima ; unde ex demonſtratis in prop. 7ª & ejus coroll. 1°. ſumma motuum lunae & nodi exponi poteſt per aream circuli & motus lunae per aream ellipſeos cujus axis major, qui eſt & diameter circuli ſummam motuum exponentis, eſt ad axem minorem in ſubduplicata ratione ſummae motus horarii mediocris lunae & motus nodorum celerrimi dum luna in ſyzygiis verſatur, ad motum mediocrem lunae ; & differentia illarum arearum exponet motum nodorum toto menſe confectum. Sit igitur $b = \frac{c}{59 \cdot 575} = \frac{525}{527 \times 59 \cdot 575}$, eritque area circuli ad aream ellipſeos ut $\sqrt{1 + b}$ ad 1, ſive, ob exiguitatem quantitatis b, ut $1 + \frac{b}{2}$ ad 1, & differentia harum arearum erit ad aream ellipſeos, id eſt, motus nodorum in hoc menſe, ubi ſcilicet nodi ſunt in quadraturis, erit ad motum lunae ut $\frac{b}{2}$ ad 1, adeoque motus ille nodorum erit $3^{\circ}.\ 0'.\ 35''.\ 46'''$.

Hinc emergit proportio a Clar. *Machin* aſſignata. *Motus lunae medius a nodo, ubi nodi verſantur in quadraturis, definitur per medium proportionale geometricum inter motum ipſius lunae medium & motum illum quo luna in conjunctione cum ſole celerrime recedit a nodo*. Deſignet enim *m* motum medium horarium lunae, *n* motum medium horarium nodi, & *r* motum celerrimum nodi

nodi, eritque ex mox demonstratis area circuli ad aream ellipseos, id est, $m + n$ ad m, ut $\sqrt{m + r}$ ad $\sqrt{m}$, adeoque est m ad $m + n$ ut $m + n$ ad $m + r$.

Hincque etiam patet motum horarium nodorum mediocrem in hoc mense dimidium esse motus horarii celerrimi: hic enim erat in Coroll. praeced. $m \times b$, ille autem est $\frac{m \times b}{2}$, adeoque aequalis $16''. 31'''\frac{1}{2}$ in antecedentia, vel $16''. 35'''. 16''\ 36'$ si non habeatur ratio inclinationis orbis lunae.

COROLL. V.

Sit v motus horarius nodorum dum luna movetur in P (*Fig.* 11.), & b motus horarius nodi in hoc mense maximus, ubi scilicet luna est in conjunctione vel oppositione cum sole, eritque per hanc prop. $v : b :: PK \times NH . ST \times SZ$; igitur in data qualibet positione nodorum summa motuum omnium horariorum v quo tempore luna describit arcum QP genitorum erit ad b ut summa omnium factorum $PK \times NH$ ad $ST \times SZ$. Est autem $NH = \frac{TZ \times TK + SZ \times PK}{ST}$, & si Pp sit arcus quem luna motu suo mediocri horario describit, ducatur pk parallela ipsi PK, erit $Pp . Kk :: ST . PK$ unde habetur $NH \times PK = \frac{TZ \times TK \times Kk}{Pp} + \frac{SZ \times PK \times Kk}{Pp}$, adeoque hujus fluxionis fluens pro circulo toto erit ad $ST \times SZ$, ut summa motuum v quam voco V ad motum b. Si igitur D designet circumferentiam circuli $QSqQ$, hoc pacto prodibit, $V.b::D.2Pp$; & si H sit motus horarius mediocris nodorum in illo mense, quoniam est $H.V::Pp.D$, erit $H.b::1.2$, hoc est, motus horarius mediocris nodorum in mense quolibet est semissis motus horarii nodorum in syzygiis lunae. Praeterea cum sit b semper ut $ST \times \overline{sZ}^2$ sive ut $\overline{sZ}^2$, erit etiam H ut $\overline{sZ}^2$.

Coroll. VI.

Ut habeatur motus nodorum annuus, advertendum est illum motum annuum mediocrem componi ex summa motuum omnium horariorum mediocrium in anno. Moveri igitur supponatur sol in circumferentia circuli cum summa velocitatis suae mediocris & velocitatis mediocris nodorum illius quae cum situ nodorum tunc temporis congruit, atque ex demonstratis in coroll. praeced. posterior haec velocitas crescit ut $\overline{sZ}^2$, id est, in ratione duplicata sinus distantiae solis a nodo, adeoque si area circuli HBR. (*Fig.* 7.) exhibet summam motuum mediocrium solis & nodi, motus solis mediocris exhibebitur per aream ellipseos HAR, cujus axis major est ad minorem in subduplicata ratione summae motuum mediocrium solis & nodi in quadratura versantis ad motum mediocrem solis. Si igitur L designet motum uniformem lunae, S motum solis, N motum mediocrem nodi, R motum mediocrem nodi dum in quadraturis versatur, erit ex Coroll. 4. nulla habita ratione inclinationis orbis lunaris, $L:R::2\times 59.575:1$, est autem $S:L::160:2139$, unde

unde erit $S : R :: 2 \times 160 \times 59.575 : 2139$, & area circuli ad aream ellipseos, id est, $S + N . S :: \sqrt{S + R} . \sqrt{S} ::$ (ob $R = \frac{3L}{2 \times 178.725} = \frac{3SS}{2L}$) $\sqrt{1 + \frac{3S}{2L}} . 1$; unde facile obtinetur motus nodorum pro tempore dato. Vel etiam, quia est $S + N . S :: \sqrt{S + R} . \sqrt{S}$, fit $S . S + N :: S + N . S + R$, unde exurgit Theorema D. *Machin*. *Motus solis medius a nodo definitur per medium proportionale geometricum inter motum ipsius solis medium, & motum illum mediocrem quo sol celerrime recedit a nodo in quadraturis*. Hoc pacto prodit motus medius nodorum annuus $19^{\circ}.39'.33''$ in orbe circulari.

Coroll. VII.

Ut in investigatione motus nodorum habeatur ratio inclinationis orbis lunaris ad Eclipticam, designet Eclipticam circulus NE (*Fig.* 12.) centro T descriptus, & circulus NQP eodem centro descriptus orbem lunae. Secet circulus EQK eodem centro descriptus Eclipticam in E & orbem lunae in Q, & designet planum perpendiculare ad planum Eclipticae & ad lineam centra solis & terrae jungentem: ex loco lunae P ducatur PM perpendicularis in hoc planum, & in lineam TQ ducantur perpendiculares PK, MK coeuntes in K: atque in triangulo sphaerico rectangulo QEN, erit radius 1 ad sinum anguli QNE, id est, ad sinum B inclinationis orbis lunae ad Eclipticam, ut cosinus arcus EN, id est, ut SZ in *Fig.* 10, ad cosinum anguli QEN, qui cosinus igitur erit aequalis

$B \times$

$B \times SZ$, & ejuſdem anguli ſinus $\sqrt{1 - B^2 \times \overline{SZ}^2}$ ſive $1 - \frac{1}{2} B^2 \times \overline{SZ}^2$ proxime; deinde in triangulo PMK eſt radius 1 ad PK ut ſinus anguli PKM ſive EQN, hoc eſt, ut $1 - \frac{1}{2} B^2 \times \overline{SZ}^2$ ad PM ſive RK in *Fig.* 10, adeoque eſt $RK = PK \times \overline{1 - \frac{1}{2} B^2 \times \overline{SZ}^2}$, ac proinde motus horarius nodorum, qui ex propoſitione erat ut $RK \times NH \times SZ$ (*Fig.* 10.), erit ut $PK \times NH \times SZ - \frac{1}{2} B^2 \times PK \times NH \times \overline{SZ}^3$, atque motus menſtruus erit ut ſumma harum quantitatum in circulo $NQPN$, ſive, ſi Pp ſit fluxio arcus NP, ut ſumma omnium quantitatum. $PK \times NH \times SZ \times Pp - \frac{1}{2} B^2 \times PK \times NH \times \overline{SZ}^3 \times Pp$, id eſt, ob $NH = TZ \times TK + SZ \times PK$, exiſtente $TN = 1$, ut $\overline{SZ}^2 \times \frac{D}{2} - \frac{1}{2} B^2 \times \overline{SZ}^4 \times \frac{D}{2}$, denotante ſcilicet D circumferentiam circuli $NQPN$; & in eadem ratione eſt motus horarius mediocris nodorum, quo uniformiter continuato motus menſtruus generari poſſet. Nodis quadraturas occupantibus, fit $SZ = ST = 1$, adeoque motus horarius in hoc caſu eſt ut $\overline{1 - \frac{1}{2} B^2} \times \frac{D}{2}$ ſive, ſi C denotet coſinum inclinationis orbis lunaris ad Eclipticam, ut $C \times \frac{D}{2}$ ob $C = \sqrt{1 - B^2} = 1 - \frac{1}{2} B^2$ quamproxime. Eſt igitur motus horarius mediocris nodorum, ubi in quadraturis conſiſtunt, ad motum horarium mediocrem in quolibet

bet alio nodorum situ ut C ad $\overline{SZ}^2 - \frac{1}{2} B^2 \times \overline{SZ}^4$. Denotet S, ut prius, motum horarium solis, N motum horarium nodi mediocrem in mense quolibet; ponatur quantitas $S \times C \times Q$ aequalis motui nodorum horario mediocri, ubi in quadraturis versantur, atque cum ex mox dictis sit $S \times C \times Q . N :: C . \overline{SZ}^2 - \frac{1}{2} B^2 \times \overline{SZ}^4$, erit $S . N :: 1 . Q \times \overline{SZ}^2 - \frac{1}{2} B^2 \times Q \times \overline{SZ}^4$, & $S + N . S :: 1 + Q \times \overline{SZ}^2 - \frac{1}{2} B^2 \times Q \times \overline{SZ}^4 . 1$, unde S

$$= \frac{S + N}{1 + Q \times \overline{SZ}^2 - \frac{1}{2} B^2 \times Q \times \overline{SZ}^4} = \frac{S + N}{1 + Q \times \overline{SZ}^2}$$

$+ \overline{S + N} \times \frac{1}{2} B^2 \times Q \times \overline{SZ}^4$ proxime ob quantitates Q & B^2 exiguas. Cum ergo Sol & Nodus moveantur, ponamus nodum immotum manere, quod eodem recidit, & solem cum summa motuum $S + N$ incedere, & Ss esse particulam circuli hac motuum summa descriptam, erit $S = \frac{Ss}{1 + Q \times \overline{SZ}^2} + \frac{1}{2} B^2 \times Q \times \overline{SZ}^4 \times Ss$. Sed fluens fluxionis $\frac{Ss}{1 + Q \times \overline{SZ}^2}$ pro toto circulo NSN est $\frac{D}{\sqrt{1 + Q}}$, & fluens fluxionis $\frac{1}{2} B^2 \times Q \times \overline{SZ}^4 \times Ss$ est $\frac{1}{2} B^2 \times Q \times \frac{3D}{8}$: adeoque quo tempore summa motuum solis & nodi describitur circulus totus NSN, id est, tempore revolutionis solis ad nodum, motus solis erit $\frac{D}{\sqrt{1 + Q}} + B^2 \times Q \times \frac{3D}{16}$. Sed si motus lunae sit ad motum solis ut 2139 ad 160, moerit ex Coroll. 3°. $Q = \frac{2139}{2 \times 160 \times 59.575}$, unde si pro D ponatur 360°, erit $\frac{D}{\sqrt{1 + Q}} + B^2 \times Q \times \frac{3D}{16}$ $= 341°. 41945$, aequalis scilicet motui solis tempore revolutionis solis ad nodum; unde motus nodi eodem tempore est 360°. — 341°. 41945 sive 18°. 58055: deinde fiat, ut 341°. 41945 ad 360° ita 18°. 58055 ad 19°. 59173 = 19°. 35'. 30'' motus scilicet nodorum in anno sidereo.

PROP. X. PROBLEMA.

Motum nodorum determinare in orbe elliptico.

QUoniam orbita lunaris non est circularis sed quasi elliptica, ut habeatur motus nodorum in hoc casu, manentibus iis quae mox demonstravimus, circulo $NQPS$ (*Fig.* 13.) inscribatur ellipsis QB, cujus semiaxis major sit TQ, & minor TB. Occurrant PK & pk ellipsi in M & q, & luna describere supponatur arcum ellipseos Mq eodem tempore quo in circulo describeret arcum Pp, & sit rq ad pm ut MK ad PK, id est, sit rq duplum spatii quod luna urgente vi $3\,MK$ describeret quo tempore describit arcum Mq: ducatur NG parallela Mq & occurrens TM in G, & si linea nodorum TN motu suo horario transferatur in TL & agatur GL parallela Mr, similia erunt triangula Mrq, GLN, ideoque erit $Mq.\ qr :: NG.\ NL$, & propter simi-

similia triangula NnL, STZ, $ST.SZ::NL.Nn$, unde conjunctis rationibus est $Mq\times ST.qr\times SZ::NG.Nn$; quare motus nodorum horarius in ellipsi designatur per quantitatem $\frac{qr\times SZ\times NG}{Mq\times ST}$: motus hic dicatur v, & motus nodorum dum luna in circulo describeret arcum Pp dicatur c, eritque $c.v::\frac{pm\times NH\times SZ}{Pp\times ST}.\frac{qr\times NG\times SZ}{Mq\times ST}::\frac{PK\times NH}{Pp}.\frac{MK\times NG}{Mq}$.

Et si a punctis q & N in TM agantur perpendicula qs & NR, similiae erunt triangula Mqs, NRG, unde habetur $NR.NG::qs.MQ$, adeoque $c.v::\frac{PK\times NH}{Pp}.\frac{MK\times NR}{qs}$ sive, quia area PTp ponitur esse ad aream MTq ut area tota circuli ad aream ellipseos, erit $Pp.qs::TM.TB$, unde fit $c.v::\frac{PK\times NH}{TM}.\frac{MK\times NR}{TB}$: dato autem loco lunae M, dantur hae rectae, & ex praecedentibus datur motus c, ergo dabitur motus v. *Q. E. I.*

Coroll. I.

Esto b motus horarius nodi in circulo, luna versante in syzygiis, & quoniam ex prop. 9ª est $b.c::ST\times SZ.PK\times NH$, erit $b.v::\frac{ST\times SZ}{TM}.\frac{MK\times NR}{TB}$; sed Geometris constat esse $NR=\frac{TZ\times TK+SZ\times MK}{TM}$, itemque est $MK.TB::PK.ST::Kk.Pp$; quo pacto fit $b.v::ST\times SZ\times Pp.TZ\times TK\times Kk+$

 SZ

$\frac{SZ \times TB \times PK \times Kk}{ST}$, ideoque termini hujus ultimi fluentem capiendo, & summam motuum horariorum v, quo tempore luna periodum suam absolvit designando per V, & circumferentiam circuli QS per D, prodibit $b . V :: ST \times Pp \cdot \frac{BT \times D}{2}$; & si u designet motum horarium mediocrem ex quo per totam ellipsim continuato summa illa V generari posset, erit $V . u :: D . Pp$, adeoque tandem $\frac{b}{2}$. $u :: ST . BT$: Sed ex coroll. 5°. prop. praeced. $\frac{b}{2}$ denotat motum horarium mediocrem nodi in circulo pro qualibet data positione nodorum; quare motus medius nodorum in ellipsi QB est ad motum medium nodorum in circulo QS ut BT ad ST, id est, ut ellipsis ad circulum. Unde si fuerit BT. $ST :: 69 . 70$, & motus nodorum in quadraturis versantium horarius medius in circulo 16″. 35‴. 16⁗. 36ᵛ, erit ille motus in ellipsi 16″. 21‴. 3⁗ ½. Si fuerit BT ad ST ut 64.27 ad 65.27, erit motus praedictus 16″. 20‴. 1⁗. 41ᵛ. Hincque quemadmodum in circulo, ita & in ellipsi motus medius horarius nodorum augetur in duplicata ratione sinus distantiae solis a nodo proximo.

Coroll. II.

Cum autem luna non describat circa terram areas temporibus proportionales, sed accelerat earum descriptionem in transitu a quadraturis ad syzygias; hinc

hinc motus nodorum minuitur: nam motus iste, dum luna percurrit arcum Pp vel Mq, est in duplicata ratione temporis, sive in duplicata ratione velocitatis, qua arcus ille describitur, inverse. Sed velocitas lunae in loco quovis P est (ex prop.4.) ad ipsius velocitatem mediocrem ut $1 - \frac{3nQ}{4} + \frac{3nQ}{2} \times \frac{\overline{PK}^2}{\overline{ST}^2}$ ad 1, sive ut $1 + \frac{3nQ}{2} \times \overline{\frac{\overline{PK}^2}{\overline{ST}^2} - \frac{1}{2}}$. Erat autem ex Coroll. 1°. propositionis hujus $b.v::ST \times SZ \times Pp.TZ \times TK \times Kk + \frac{SZ \times BT \times PK \times Kk}{ST}$; & ex mox dictis, si v' denotet motum nodorum quo tempore luna arcum Mq describit motu accelerato, erit $v.v'::1 + 3nQ \times \overline{\frac{\overline{PK}^2}{\overline{ST}^2} - \frac{1}{2}}.1$ proxime; hincque $b.v'::ST \times SZ \times Pp.$

$$\frac{TZ \times TK \times Kk}{\overline{1 + 3nQ \times \frac{\overline{PK}^2}{\overline{ST}^2} - \frac{1}{2}}} + \frac{BT}{ST} \times \frac{SZ \times PK \times Kk}{\overline{1 + 3nQ \times \frac{\overline{PK}^2}{\overline{ST}^2} - \frac{1}{2}}},$$ sive,

$$b.v'::ST \times SZ \times Pp.TZ \times TK \times Kk \times \overline{1 - 3nQ \times \overline{\frac{\overline{PK}^2}{\overline{ST}^2} - \frac{1}{2}}}$$

$$+ \frac{BT}{ST} \times SZ \times PK \times Kk \times \overline{1 - 3nQ \times \overline{\frac{\overline{PK}^2}{\overline{ST}^2} - \frac{1}{2}}}$$

quamproxime: tum fluentes capiendo & scribendo W pro summa motuum v' toto tempore periodico genita, invenietur $b.W::ST \times Pp.\overline{1 - \frac{3nQ}{4}} \times$

$\frac{BT \times D}{2}$, & si w designet motum horarium mediocrem ex quo uniformiter continuato generari posset motus totus W, erit $W.$ w :: $D. Pp$, adeoque $\frac{b}{2}.$ w :: $ST. \; 1 - \frac{3nQ}{4} \times BT$: monstravimus autem in Coroll. 1°. esse in quolibet nodorum situ $\frac{b}{2}. u :: ST. BT$; hinc ergo tandem erit $u.$ w :: 1. $1 - \frac{3nQ}{4}$ atque w $= u - \frac{3nQ}{4} u$. Est autem $\frac{3nQ}{2} = \frac{100}{11023}$, & nodis quadraturas tenentibus invenimus $u = 16''. 2'''. 3''\frac{1}{2}$; unde habetur $\frac{3nQ}{4} u = 4'''. 27''. 56'$, & w $= 16''. 16'''. 35''. 34'$. Sin autem fuerit $u = 16''. 20'''. 1''. 41'$, erit $\frac{3nQ}{4} u = 4'''. 26''. 43'$, & w $= 16''. 15'''. 34''. 58'$.

Coroll. III.

Ex demonstratis in duobus praecedentibus corollariis collatis cum Coroll. 6°. prop. 9. patet motum solis, & motum solis a nodo exprimi per aream ellipseos & circuli, atque axem ellipseos majorem esse ad axem minorem ut $\sqrt{S+R}$ ad $\sqrt{S}$, & esse $S. S+N :: S+N. S+R$: unde scribendo pro R valorem in superiori corollario inventum, prodibit motus annuus mediocris nodorum 19°. 18'. 0", fere uti invenit Newtonus. Sinus autem aequationis maximae nodorum est ad radium (per Coroll. 3. prop. 7.) ut ut differentia axium ellipseos praedictae ad eorum summam, unde haec aequatio prodit 1°. 29'. 45''. Haec autem ita se habent in hypothesi quod Luna describat circa terram ellipsim, cujus axis major est ad minorem ut 70. ad 69; si enim haec ratio statuatur 65. 27 ad 64. 27, motus nodorum annuus erit 19°. 16'. 7'', & aequatio maxima 1°. 29'. 37''. In aliis autem locis haec aequatio habetur per Coroll. 3. prop. 7, eamque per ejusdem propositionis coroll. 2. patet addi debere motui medio nodorum ubi nodi transeunt a quadraturis ad syzygias, & ab eodem subduci ubi transeunt a syzygiis ad quadraturas, ut habeatur eorum motus verus.

SCHOLIUM.

Dato motu nodorum in circulo, methodum forte sequentem usurpare liceret ad investigandum eumdem motum in qualibet alia curva. Esto circulus HNO (*Fig.* 16.) circulus centro T descriptus, & APB quaelibet alia curva; ducantur rectae TP, Tp, abscindentes angulum quam minimum PTp, & secantes circulum in N, & n, & curvam in P & p. Sit ST recta jungens solem & terram, & TQ huic perpendicularis, & in TQ agantur perpendiculares PK, NI, atque in TP perpendicularis pr. Dum igitur luna describit curvae arcum Pp sive angulum datum PTp, motus nodorum est ut vis & quadratum temporis conjunctim directe, & ut recta pr inverse. Nam motus nodorum in arcu circulari Nn est ut vis, & quadratum temporis conjunctim, & mutata distantia TN in TP, & manennentibus vi, tempore & angulo PTp, eſt idem motus ut pr inverſe, id eſt, ut TP inverſe; adeoque manente ſolum angulo PTp, motus nodorum horarius, dum luna deſcribit arcum Pp, eſt ut vis PK & quadratum temporis T conjunctim directe, & ut TP inverſe, id eſt, ob $PK = \frac{NI \times TP}{TN}$, ut $\frac{NI}{TN} \times TT$, & ſi t denotet tempus deſcriptionis arcus circularis Nn, erit motus nodorum dum deſcribitur arcus Pp ad motum nodorum dum deſcribitur Nn ut TT ad tt.

DE MOTU APOGAEI LUNAE.

SI Luna in P revolvens (*Fig.* 15.) attractione terrae in T ſola urgeretur, ellipſim APD deſcriberet circa umbilicum T: at accedente ſolis actione nunc augetur nunc minuitur gravitas lunae in terram, & quoniam actio illa non eſt quadrato diſtantiae TP reciproce proportionalis, gravitas lunae tota ab illa lege aberrat, unde fit ut ipſius orbis non ſit accurate ellipticus, ſed in deſcenſu ab abſide ſumma luna non perveniat ad apſidem imam poſt deſcriptum 180. graduum, ſed citius vel tardius, prout magis vel minus quam juxta praedictam legem urgetur in terram. Hic autem eam vis ſolaris partem ſolam cum Newtono conſideramus quae agit ſecundum lineam TP, nulla habita ratione partis alterius eidem TP perpendicolaris, quippe quae in integra revolutione in orbita lunari, quam propemodum circularem ſupponimus, motum

lunae

lunae aequaliter fere accelerat ac retardat. Vis igitur solis quae tendit ad centrum T ex duabus componitur partibus, quarum altera 2φ lunam P in circulo APD (*Fig.* 16.) revolventem versus terram deprimens, est ad alteram $2\varphi \times \frac{3\,\overline{PK}^2}{\overline{TP}^2}$ quae lunam a terra retrahit, ut $\overline{TP}^2$ ad $3\,\overline{PK}^2$, & summa actionum omnium vis prioris in tota revolutione erit ad summam actionum omnium vis posterioris ut summa omnium $\overline{TP}^2$ ad summam totidem $3\,\overline{PK}^2$, id est, ut 2 ad 3, quippe ob $\overline{TP}^2 = \overline{PK}^2 + \overline{TK}^2$, summa omnium $\overline{TP}^2$ in circulo est aequalis summae omnium $\overline{PK}^2 + \overline{TK}^2$, sive summae duplicatae omnium $\overline{PK}^2$. Est ergo differentia summarum impulsuum praefatorum aequalis dimidio summae impulsuum vis 2φ, ideoque vis mediocris, quae retrahit lunam a terra, & quae per totam revolutionem uniformiter continuata generaret differentiam illam, est ipsa vis φ. Hinc igitur patet quod effectus omnes, qui viribus istis toto tempore periodico in orbe propemodum circulari producuntur, eosdem vis uniformis φ eodem tempore generare posset. Quare vim illam uniformem illarum loco in sequentibus licite usurpabimus.

PROP.

PROP. XI. PROBLEMA.

Motum lunae, quatenus ad terram accedit vel ab ea recedit, determinare.

Ellipseos APD (*Fig.* 15.), quam luna sola terra attractione describeret, sit axis major AD, & focus T. Exeat luna de apside summa A & perveniat ad locum Q in orbita AQH quam viribus solis & terrae conjunctis describit: vis attractionis terrae in distantia 1 sit 1, & in alia quavis distantia TQ erit $\frac{1}{TQ^2}$; solis autem vis mediocris lunam retrahens a terra in distantia 1 sit φ, & in distantia TQ erit $\varphi \times TQ$; vis centrifuga lunae in apside summa A sit F, quae quoniam crescit in triplicata ratione distantiae diminutae, in loco Q erit $\frac{F \times \overline{TA}^3}{\overline{TQ}^3}$. Denique centro T intervallo TQ describatur circulus QM. Vis tota lunam impellens versus terram est differentia inter vim centripetam & centrifugam, adeoque est aequalis $\frac{1}{\overline{TQ}^2} - \varphi \times TQ - \frac{F \times \overline{TA}^3}{\overline{TQ}^3}$; huic vi proportionalis semper ducatur recta MN perpendicularis rectae TA, sitque LNO curva quam punctum N perpetuo tangit, atque ex prop. 2. velocitas lunae in Q vel M versus T his viribus descendentis est in subduplicata ratione areae $ALNM$, hoc est, in subduplicata ra-

ratione quantitatis $\frac{2\,AM}{TA \times TM} - \varphi \times \overline{TA}^2 + \varphi \times \overline{TM}^2$ $- \frac{F \times TA^3}{TM^2} + F \times TA$. Esto H apsis ima, & si sumi intelligatur $TB = TH$, evanescit illa velocitas in punctis A & H vel B. Ponatur itaque $AM = z$, $TA = b$, ellipseos APD semiaxis major $= 1$, & excentricitas $TC = e$, eritque vis centrifuga F ad attractionem terrae in A sive ad $\frac{1}{bb}$, ut $\overline{1+e} \times \overline{1-e}$ ad b, vel ut $1 - e$ ad 1, ideoque $F = \frac{1-e}{bb}$: has substituendo quantitates in valore velocitatis, & rejiciendo terminos omnes termino φzz dignitate minores, evanescente velocitate, prodit z sive $AB = \frac{2e - 2\varphi b^3}{1 - 5\varphi b^2}$. Quamobrem spatium percursum vi φ in orbe elliptico parum excentrico est $\frac{-2\varphi b^3}{1 - 5\varphi b^2}$ quamproxime, & $\frac{-2\varphi}{1 - 5\varphi}$ in orbe circulari. *Q. E. I.*

Coroll.

Hinc si orbis APD fuerit circulus, altitudo TA sit minima lunae a terra distantia & aequalis 1, & maxima TH aequalis $1 + \frac{2\varphi}{1 - 5\varphi}$: bisecetur spatium illud exiguum $\frac{2\varphi}{1 - 5\varphi}$, & centro T atque intertervallo $1 + \frac{\varphi}{1 - 5\varphi}$ deſcribatur circulus, eritque area illius circuli quamproxime aequalis areae quam luna deſcribit in orbe AQH quo tempore periodum ſuam abſolvit.

PROP. XII. PROBLEMA.

Iiſdem manentibus invenire motum medium Apogaei lunae.

Tempus deſcenſus per Qs vel Mm eſt ut ſpatium Mm directe & velocitas in M inverſe, id eſt, ut $\frac{Mm}{\sqrt{ALNM}}$ ſive ex modo demonſtratis, ponendo $1 - 5\varphi b^3 = DD$, & $\frac{e - \varphi b^3}{1 - 5\varphi b^3} = K$, ut $\frac{TM \times Mm}{D\sqrt{2K \times AM - \overline{AM}^2}}$. In TA igitur capiatur $TG = K$, & centro G, foco T, & ſemiaxe majore GA deſcribatur ellipſis ARV cujus ſemiaxis minor vocetur B, ducaturque ſemper $TR = TM$, $Tr = Tm$, eritque $\frac{TM \times Mm}{D\sqrt{2K \times AM - \overline{AM}^2}} = \frac{2RTr}{B \times D}$, adeoque tempus deſcenſus per AB, hoc eſt, tempus quo luna revolvendo ab apſide A pervenerit ad apſidem H eſt ut area ſemiellipſeos ARV applicata ad factum $B \times D$. Quare tempus quo luna ſola terrae attractione deſcriberet ſemiellipſim APD eſt ad tempus

pus quo revera describit angulum inter apsides AQH ut $\frac{APD}{\sqrt{1-ee}}$ ad $\frac{ARV}{B \times D}$, hoc est, ut $\sqrt{1-5\phi b^2}$ ad $1 + \frac{\phi b^3}{1-5\phi b^2}$ sive in subduplicata ratione $1 - 5\phi b^2 - 2\phi b^3$ ad 1; quae ratio, coincidente orbita cum circulo, est ea $\sqrt{1-7\phi}$ ad 1. Sed ex supra notatis sequitur vim qua luna in orbe suo revolvitur non esse 1 sed $1-\phi$; tempora autem periodica sunt in ratione subduplicata virium centripetarum inverse, ideoque tempus quo luna periodum suam absolvit est ad tempus quo ab apside digrediens ad eamdem revertitur ut $\sqrt{1-7\phi}$ ad $\sqrt{1-\phi}$, hoc est, ut $\sqrt{CB}$ ad $\sqrt{CA+2AB}$; & in eadem ratione est motus medius lunae ab Apogaeo ad motum medium lunae. Hinc motus Apogaei medius in anno sidereo prodit 40°. 40′. 38″, ponendo scilicet $\phi = \frac{1}{357.45}$. In tabulis Astronomicis Clar. *Halleii* motus ille est 4°. 41′. 33″, id est, ablatis 50″ praecessionis aequinoctiorum, 40°. 40′. 43″. *Q. E. I.*

Coroll.

Ex supradictis liquet radium *TR* describere areas temporibus semper proportionales.

PROP. XIII. PROBLEMA.

In quolibet dato ad solem Apogaei situ determinare ejus motum.

Sit ST (*Fig.* 16.) linea conjungens centra solis & terrae, TL linea quadraturarum, luna in P describat circa terram in umbilico T ellipsim APB cujus semiaxis major sit 1, & semiaxis minor b; centro T & radio TH aequali semiaxi majori describatur circulus HNS secans axem majorem AB in H & TP in N; deinde in TQ demittantur perpendicula HL, NI, PK, & in TH perpendiculum NR. His factis dicantur TA, b; TP, x; HL, m; TL, n; NR, y; TR, v; PK, z. Vis solis in lunam agens secundum PT est $2\varphi x - \frac{6\varphi zz}{x}$, adeoque gravitas lunae in loco P est $\frac{1}{xx} + 2\varphi x - \frac{6\varphi zz}{x}$ quae in apside A fit $\frac{1}{bb} + 2\varphi b - 6\varphi m^2 b$; haec autem gravitas, si augeretur in ratione duplicata distantiae reciproce, foret in loco P, $\frac{1}{xx} + \frac{2\varphi b^3}{xx} - \frac{6\varphi m^2 b^3}{xx}$, quae subducta ex $\frac{1}{xx} + 2\varphi x - \frac{6\varphi zz}{x}$ relinquit $2\varphi x - \frac{6\varphi zz}{x} - \frac{2\varphi b^3}{xx} + \frac{6\varphi m^2 b^3}{xx}$; atque ex hac differentia virium oritur motus Apogaei.

Esto jam L motus lunae, A motus mediocris Apogaei, atque ex prop. praeced. est $L - A . L : : \sqrt{1 - 7\varphi}$.

$\sqrt{1-7\varphi}\cdot\sqrt{1-\varphi}$; hincque $A = \frac{3\varphi \times L}{1-\frac{1}{4}\varphi}$ fere, vel etiam $A = 3\varphi \times L$ proxime, ac propterea motus Apogaei eſt ut vis ipſum generans.

His poſitis, Ellipſis tota, quam voco E, eſt ad ipſius ſectorem quam minimum TPp ſive $\frac{xx}{2}Nn$ (recta ſcilicet Tp ſecante circulum in n) ut motus medius Apogaei A tempore unius revolutionis genitus ad motum $\frac{A \times xx \times Nn}{2E}$ tempore deſcriptionis areae TPp genitum; & hic motus eſt ad vim φ ipſum generantem ut motus quaeſitus ad vim $2\varphi x - \frac{6\varphi zz}{x} - \frac{2\varphi b^3}{xx} + \frac{6\varphi m^2 b^3}{xx}$: unde motus tempore TPp genitus erit $\overline{x^3 - 3xzz - b^3 + 3m^2b^3} \times \frac{A \times Nn}{E}$. Eſt autem $NI = \pm ny \pm mv$, ideoque $z = x \times \overline{\pm ny \pm mv}$, & $zz = x^2 \times \overline{n^2y^2 \pm 2mnvy + m^2v^2}$: ſupprimi autem poteſt terminus ambiguus $\pm 2mnvy$, utpote in dimidia parte revolutionis poſitivus, in altera negativus. Eſt etiam in ellipſi $x = \frac{bb}{1 \pm ev} = bb \mp bbev + bbe^2v^2 \mp$ &c. Sed omitti poteſt terminus $\mp bbev$ ob rationem modo dictam. Itaque pro zz ſcripto $x^2 \times \overline{n^2y^2 + m^2v^2}$, & pro x^3 ſcripto b^6, motus ſupradictus erit $\overline{b^6 - b^3 + 3m^2b^3 - 3n^2b^6y^2 - 3m^2b^6v^2} \times \frac{A \times Nn}{E}$. Unde ſingulorum terminorum capiendo fluentes & ſcribendo D pro circumferentia circuli HNS, mo-

tus

tus Apogaei, quo tempore luna periodum suam absolvit, erit $\overline{b^6 - b^3 + 3m^2 b^3 - \frac{3m^2 b^6}{2} - \frac{3n^2 b^6}{2}} \times \frac{A \times D}{E} =$ (ob $E = \frac{b \times D}{2}$ & $m^2 + n^2 = 1$) $\overline{6m^2 b^3 - 2b^3 - b^6} \times \frac{A}{b}$. Q. E. I.

Coroll. I.

Ubi Apogaeum in quadraturis versatur, fit $m = 0$; & ubi in syzygiis, fit $m = 1$: unde motus Apogaei in priore casu est $- \frac{2b^3 + b^5}{b} A$, in posteriore $\frac{4b^3 - b^6}{b} A$; sive, quia est $bb = b \times \overline{1 - e}$, & $b^6 = b^3 \times \overline{1 - e}^3 = b^3 \times \overline{1 - 3e}$ quamproxime, prior motus evadit $- \frac{3b^3 - 3b^3 e}{b} A$ vel $- 3b^3 \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \times A$; ac posterior $\frac{3b^3 + 3b^3 e}{b} A$ vel $3b^3 \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \times A$. Hinc ergo liquet quod Apogaeum progreditur, ubi in conjunctione vel oppositione solis versatur; regreditur vero, ubi in quadraturis est; & quod motus ejus in priore casu est ad ejus motum in posteriori ut $1 + e$ ad $1 - e$, hoc est, ut TA ad TB quamproxime: itemque quod motus ille prior singulis diebus est 24′. 53″ in consequentia respectu fixarum; motus autem posterior 22′. 17″ in antecedentia. Supponimus autem esse $e = 0.05505$.

Ponatur $\overline{6m^2 b^3 - 2b^3 - b^6} \times \frac{A}{b} = 0$, atque emerget $m = \sqrt{\frac{1-e}{2}}$ quamproxime; quo in casu m erit

sinus

finus anguli $43^{o}. 25'. 20''$. Quiefcit igitur Apogaeum, ubi diftat a quadratura angulo $43^{o}. 25' 20''$.

COROLL. II.

Ex hac propofitione patet differentiam inter motum Apogaei medium dum verfatur in quadraturis, & ipfius motum in quovis alio fitu effe ut quadratum finus diftantiae Apogaei a quadratura; adeoque fi area circuli HB (*Fig.* 17.) exponat fummam motus medii folis & motus medii Apogaei in quadratura verfantis, dempta illa differentia motuum quam diximus effe proportionalem quadrato diftantiae apogaei a quadratura; fumma motus medii folis & motus medii apogaei in quadratura verfantis exponetur per aream ellipfeos HA (per prop. 7.) cujus axis major eft ad axem minorem in fubduplicata ratione motus folis ab apogaeo in quadraturis verfante ad motum folis ab apogaeo in fyzygiis verfante, id eft, fi S denotet motum medium folis, Q motum medium apogaei ubi eft in quadraturis, & R motum ipfius medium ubi eft in fyzygiis, axis major eft ad minorem ut $\sqrt{S+Q}$ ad $\sqrt{S-R}$. Eft autem ex Coroll. praeced. $Q = 3\, b^3 \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \times A$, & $R = 3\, b^3 \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \times A$; unde axis major eft ad minorem ut $\sqrt{S + 3\, b^3 \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \times A}$ ad $\sqrt{S - 3\, b^3 \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \times A}$, id eft, ut 829685 ad 538214: un-

unde si fiat per Coroll. 3. prop. 7, ut summa axium ad eorum differentiam ita radius ad sinum aequationis maximae, prodit haec Apogaei aequatio maxima 12°. 18'. 10". Eam Collegit Newtonus ex observationibus 12°. 18'. Locum habet in octantibus Apogaei proxime, in aliis locis haec aequatio per idem Coroll. est ad aequationem maximam ut sinus duplae distantiae Apogaei a quadratura vel syzygia proxima ad radium, adeoque datur. Addi autem debet motui medio Apogaei in transitu Apogaei a syzygiis ad quadraturas, & subduci ubi Apogaeum pergit a quadraturis ad syzygias, ut habeatur motus Apogaei verus.

SCHOLIUM.

Ex duabus ultimis propositionibus sequitur motum apogaei tum medium tum aequatum, qualis ex theoria elicitur, cum observationibus consentire, ac proinde vim solis praefatam his effectibus producendis omnino esse parem & commensuratam.

Hic mihi liceat advertere ad ea quae hac de re scripsit Vir Doctissimus D. *Murdocke* in Transf. Phil. anni 1751. & 1752. pag. 62. & seqq. Nec enim gravabitur, ut spero, Vir Clarissimus, si ipsum errasse censeam dum asserit vi praefata solis generari duntaxat dimidium motus apogaei, duplicandum autem esse motum illum propter vim consimilem quae terram, quatenus cum luna circa commune gravitatis centrum movetur, similiter afficit; atque hoc pacto theoriam lunae Newtonianam in tuto esse positam. Etenim, ut sentio, cum vi-

vires illae terram & lunam sollicitantes sint proportionales distantiis horum corporum a centro communi gravitatis, propterea efficiunt ut motus utrobique sint similes & similes sint figurae ab utroque planeta circa illud centrum descriptae, ac proinde ut apsides utriusque orbis in eadem recta jaceant & eumdem prorsus inter se contineant angulum: sed cum hae vires ad mutuas terrae & lunae in se invicem actiones non pertineant, sed extraneae sint & seorsim agant, nullatenus duplicatur earum effectus.

Insuper advertendum est vim illam quam hactenus cum Newtono usurpavimus esse summam virium solis in terram & lunam circa gravitatis centrum commune revolventes agentis, uti videre est apud Newtonum prop. 25. lib. 3. Phil. Nat. in qua ut determinet vis praedictae rationem ad gravitatem terrestrem, supponit lunam revolvi circa terram quiescentem ad distantiam illam qua circum se mutuo revolvuntur. Terrae igitur vim novam adjicere superfluum est. Quamvis autem summae tam virium quam motuum referantur ad lunam, ipsamque circa terram quiescentem moveri fingatur, motus inaequalitatum tamen ideo habetur justa mensura, quod in orbibus similibus errores lineares sunt ut orbium diametri, angulares vero sunt iidem. Haec benigne accipiantur, velim, a Clarissimo Viro, quae si falsa demonstraverit, dicta revocabo.

PROP. XIV. PROBLEMA.

Variationem excentricitatis invenire.

SPatium quo Luna in ellipſi revolvens ad terram accedit eſt (ex prop. XI.) $\frac{2e - 2\phi b^3}{1 - 5\phi b^2}$, cujus dimidium ſi auferatur ex e, reſiduum $\frac{\phi b^3}{1 - 5\phi b^2}$ erit variatio media excentricitatis tempore lunae periodico. Sit autem $\frac{\phi b^3}{1 - 5\phi b^2} = K$, atque ad modum propoſitionis praecedentis demonſtrabitur $\overline{6m^2b^3 - 2b^3 - b^5} \times \frac{K}{b}$ eſſe variationem excentricitatis eo menſe genitam quo ſinus diſtantiae apogaei a quadratura aequalis eſt m. Variatio igitur eſt $-3b^3\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \times K$ ubi Apogaeum verſatur in quadraturis; ubi autem in ſyzygiis, variatio eſt $3b^3\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \times K$. Augetur igitur excentricitas in tranſitu apſidum a quadraturis ad ſyzygias, & differentia inter maximam & minimam excentricitatem, ut patet, eſt $6b^3\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \times K = \frac{6\phi b^5}{1 - 5\phi b^2}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} = 0.02355$, ponendo ſcilicet $e = 0.05505$; atque hujus differentiae dimidium eſt $0.01177\frac{1}{2}$, quod Newtonus ſtatuit $0.01172\frac{3}{4}$. Patet autem incrementum excentricitatis in progreſſu apſidum a quadraturis ad ſy-

ſyzygias eſſe proportionale variationi motus Apogaei, & eſſe ut quadratum ſinus diſtantiae Apogaei a quadratura, id eſt, per Coroll. 4. prop. 7, ut pars PC radii TP intercepta inter circulum & ellipſim (*Fig.* 17.) modo angulus HTP ſit aequalis diſtantiae apogaei a quadratura. Hinc ſi ſemiaxis minor TH exhibeat excentricitatem minimam orbis lunaris, & ſemiaxis major TA excentricitatem maximam, TP exhibebit excentricitatem ubi Apogaeum diſtat a quadratura angulo quovis HTP. Dato igitur ſitu Apogaei, datur excentricitas. *Q.E.I.*

DE INAEQUALITATIBUS MOTUUM LUNARIUM

PARS ALTERA.

DE INCLINATIONE ORBIS LUNARIS AD PLANUM ECLIPTICAE.

PROP. I. PROBLEMA.

Investigare variationem horariam inclinationis orbis lunaris ad planum Eclipticae.

SIt P (*Fig.* 18.) locus lunae in orbe circulari ad tempus quodlibet datum, NRS vestigium orbis in plano Eclipticae, PR perpendicularis in planum Eclipticae, Qq linea quadraturarum, ST linea jungens centra terrae & solis, Nn linea nodorum, & angulus NTL motus horarius nodorum. In TN, & TL agantur perpendicula PM, & PC, agantur etiam RM, & RC; secet autem RC lineam TN in I, & jungatur PI. Patet

tet angulum PMR ſive PIR eſſe inclinationem orbis lunae ad planum Eclipticae, quae elapſo horae ſpatio fit PCR, adeoque horum angulorum differentiam CPI eſſe variationem horariam inclinationis. A puncto I in PC erigatur perpendiculum Ic, atque ob triangula ſimilia CIc, & PRI, eſt PI. PR :: CI. $Ic = \frac{PR \times CI}{PI}$, angulus igitur CPI erit ad angulum CTI, id eſt, variatio inclinationis horaria erit ad motum horarium nodorum, ut $\frac{PR \times CI}{PI^2}$ ad $\frac{CI}{TI}$, ſive, ut $TI \times \frac{PR}{PI}$ ad PI. Ductis autem RK perpendiculari in Qq, & SZ perpendiculari in Nn, eſt angulus ITC ad $33''. 10'''. 33''$ (per prop. 9. partis primae, & ipſius coroll. 3.) ut $RK \times PI \times SZ$ ad $\overline{ST}^3$; quare ſcribendo n pro angulo $33''. 10'''. 33''$, eſt CPI. n :: $RK \times TI \times SZ \times \frac{PR}{PI}$. $\overline{ST}^3$. *Q.E.I.*

IDEM ALITER.

Exhibeat $sPIL$ orbitam lunae poſt translationem horariam nodi ab N in L, & ex centro T deſcribantur arcus NI, & Vs perpendiculares in orbitam sP, exiſtente VPN quadrante circuli; ſitque PI ad PR, ut radius ad ſinum inclinationis orbis lunae, prout in priori methodo: eritque in triangulo rectangulo ſphaerico NIL ſinus arcus NL ſive arcus ipſe NL, qui eſt motus horarius nodorum ad ſinum arcus NI ſive ad arcum ipſum NI, ut radius ad ſinum anguli NLI ſive inclinationis orbis lunaris;

eſt-

estque arcus Nl ad arcum Vs, ut PI ad TI: unde per compositionem rationum est arcus NL sive motus horarius nodorum ad arcum Vs, qui metitur variationem horariam inclinationis ut PI ad $TI \times \frac{PR}{PI}$. Q. E. I.

Coroll. I.

Ex eo quod sit $CPI \,.\, ITC :: TI \times \frac{PR}{PI} \,.\, PI$, colligitur variationem inclinationis aequari motui nodorum ubi fuerit $TI \,.\, PI :: PI \,.\, PR$, id est, ubi fuerit TI ad PI, ut radius ad sinum inclinationis orbis lunaris ad planum eclipticae.

Coroll. II.

Sint nodi in quadraturis, eritque $PI = PK$ (*Fig.* 19) & $TI = TK$, & quoniam exiguus est angulus inclinationis orbis lunaris, scribi potest PK pro RK, unde positis v pro variatione horaria inclinationis & s pro sinu inclinationis ad radium r, erit $v \,.\, n :: PK \times TK \times \frac{s}{r} \,.\, \overline{TP}^2$. A puncto S quod syzygiam denotat erigatur SD parallela & aequalis TQ, jungatur TD, & a puncto P in TS demittatur perpendiculum PH secans TD in G, & sumpto arcu horario Pp, agatur pb parallela ipsi PH; & pq perpendicularis in PH; tumque propter similia triangula similia Ppq, & PTH, est $TP \,.\, PH$ seu $TK :: Pp \,.\, pq$ seu Hb; unde $PK \times TK = HG \times$

TK

$TK = \frac{TP \times HG \times Hb}{Pp}$. Fit igitur $v . n :: HG \times Hb \times \frac{s}{r} . TP \times Pp$, & summa variationum omnium horariarum, quo tempore luna describit arcum QP, erit ad summam totidem angulorum aequalium n, ut area trianguli THG seu $\frac{\overline{PK}^2}{2}$ ducta in $\frac{s}{r}$ ad $TP \times QP$. Sed quia $\frac{Pp}{TP}$ exhibet angulum motus horarii lunae, erit (per coroll. 3. prop. 9. partis primae) $n = \frac{Pp}{TP} \times \frac{525}{527 \times 59 \cdot 575}$, & summa omnium angulorum n pro arcu QP erit $\frac{QP}{TP} \times \frac{525}{527 \times 59 \cdot 575}$; quo pacto summa variationum inclinationis quo tempore luna describit arcum QP erit ad $\frac{525}{527 \times 59 \cdot 575}$ ut $\frac{s}{r} \times \frac{\overline{PK}^2}{2}$ ad $\overline{TP}^2$, & si vocetur V variatio tota inclinationis genita dum luna transit a quadratura Q ad syzygiam S, erit $V \cdot \frac{s}{r} :: \frac{525}{2 \times 527 \times 59 \cdot 575} . 1$. Insuper cum inclinatio orbis lunae sit paucorum graduum, pro $\frac{s}{r}$ scribi potest $5^{\circ}. 1'$, hoc est, ipsa inclinatio mediocris minima. Quare fiet $V = 2'. 30''$, sed si augeatur variatio haec in ratione temporis synodici ad tempus periodicum, erit $2'. 43''$, uti invenit *Nevvtonus*; & si minuatur in ratione 69. ad 70. ob formam ellipticam orbis lunaris, tandem evadet $2'. 40'' \frac{1}{2}$.

Quo-

Quoniam eſt $v.\ n :: HG \times Hb \times \frac{s}{r}.\ TP \times Pp$, patet variationem totam inclinationis genitam quo tempore luna deſcribit quadrantem QS eſſe ad motum nodorum n uniformiter per idem tempus continuatum, ut triangulum TSD ductum in $\frac{s}{r}$ ad $TP \times QS$, ſive, ut $TP \times \frac{s}{r}$ ad $2\,QS$, hoc eſt, ut diameter ducta in $\frac{s}{r}$ ad circumferentiam, quemadmodum tradit *Nevvtonus* coroll. 4. prop. 34. lib. 3. Phil. Nat.

In praecedenti calculo quaſi immota manere ſuppoſuimus tum locum nodorum tum inclinationem plani orbis lunae ad planum eclipticae, quae hypotheſis a vero paululum aberrat, ſed error inde oriundus utpote tam modicus negligi poteſt.

Coroll. III.

Erat in coroll. praeced. $V.\ \frac{s}{r} :: \frac{525}{2 \times 527 \times 59 \cdot 575}$ 1, ſive variatio inclinationis in eo menſis quadrante, quo nodi verſantur in quadraturis eſt ad ipſam inclinationem, ut $\frac{525}{2 \times 527 \cdot 59 \cdot 575}$ ad 1, hoc eſt, (per coroll. 4. prop. 9. partis primae) ut motus medius nodorum in hoc menſis quadrante ad motum medium lunae. Si igitur centro T deſcribatur ellipſis QB cujus axis major TQ ſit ad minorem TB, ut motus lunae a nodo ad motum lunae, quemadmadmodum expositum est in praedicto corollario, recta TQ exhibebit inclinationem orbis luna & nodo quadraturis tenentibus, & SB exhibebit variationem sive decrementum inclinationis, & TB ipsam inclinationem cum luna ad syzygiam pervenerit. Et cum variatio genita post descriptum arcum quemlibet QP est (ex Coroll. praeced.) ut $\overline{PK}^2$, id est, si ellipsis secet radium TP in C, (per Coroll. 4. prop. 7. p. 1) ut PC; atque adeo radius TC exhibebit inclinationem orbis lunae ubi luna discesserit a nodo angulo QTP. Hinc patet eadem constructione haberi tum motum nodi tum inclinationem orbis in hoc mense pro vario situ lunae respectu lineae nodorum, sicuti se invenisse docet Clar. *Machin*.

Coroll. IV.

Sit luna in P (*Fig.* 20.) & v variatio horaria inclinationis, estque ex hac propositione $v . n :: PK \times TI \times SZ \times \frac{s}{r} . \overline{ST}^3$. Sed si Pp sit motus horarius lunae, & ducatur pk parallela ipsi PK, erit $Pp . Kk :: ST . PK$; est etiam, uti norunt geometrae, $TI = \frac{TK \times SZ}{ST} - \frac{PK \times TZ}{ST}$, unde fit $TI \times PK = \frac{SZ \times TK \times Kk}{Pp} - \frac{TZ \times PK \times Kk}{Pp}$; quare $v . n :: \overline{SZ}^2 \times TK \times Kk \times \frac{s}{r} - SZ \times TZ \times PK \times Kk \times \frac{s}{r} . Pp \times \overline{ST}^3$: datur autem arcus Pp, unde si maneat nodorum situs & inclinatio orbis, summa variationum omnium horariarum in hoc mense erit ad n, ut summa omnium quantitatum $\overline{SZ}^2 \times TK \times Kk \times \frac{s}{r} - SZ \times TZ \times PK \times Kk \times \frac{s}{r}$ ad $Pp \times \overline{ST}^3$, id est, ut circumferentia circuli $QSqQ$ ducta in $SZ \times TZ \times \frac{s}{r}$ ad $Pp \times 2\,\overline{ST}^2$: ac proinde si vocetur H variatio horaria mediocris, ex qua per mensem uniformiter continuata variatio menstrua generari posset, erit $H.\,n :: SZ \times TZ \times \frac{s}{r}.\ 2\,\overline{ST}^2$.

COROLL. V.

In circulo QPS (*Fig.* 19.) sit TQ linea nodorum TP recta jungens centra terrae & solis, quae moveri intelligatur cum summa velocitatum mediocrium solis & nodi, & maneat orbis lunaris inclinatio, quae, cum tota ipsius variatio 16′ vix superet, in hocce calculo quasi constans supponi potest. In Coroll. praeced. erat $H.\,n :: PK \times TK \times \frac{s}{r}.\ 2\,\overline{ST}^2$, seu $H.\,n :: HG \times Hb \times \frac{s}{r}.\ 2\,ST$, adeoque summa omnium variationum mediocrium H, quo tempore sol motu suo composito describit angulum QTP est ad summam totidem angulorum n, ut aggregatum omnium factorum $HG \times Hb \times \frac{s}{r}$ ad summam totidem diametrorum Qq, id est, ut triangulum THG vel $\frac{\overline{PK}^2}{2}$ ductum in $\frac{s}{r}$ ad $2\,ST \times QP$, & variatio tota inclinationis, quam voco V, quo

quo tempore sol digreditur a nodo toto quadrante QS est ad summam illam angulorum n, ut $\frac{ST}{4} \times \frac{s}{r}$ ad QS. Sed si nulla habeatur ratio inclinationis, n, aequatur, uti supra dictum est, motui horario lunae ducto in $\frac{1}{59 \cdot 575}$, id est, $n = \frac{Pp}{ST} \times \frac{1}{59 \cdot 575}$; & quoniam quadrans QS non motu lunae, sed motu mediocri solis a nodo describitur, scriptis L pro motu medio lunae, S pro motu medio solis, N pro motu medio nodorum, erit summa praedicta angulorum n aequalis $\frac{QS}{ST} \times \frac{L}{S+N} \times \frac{1}{59 \cdot 575}$ sive $\frac{QS}{ST} \times \frac{3SS}{LX \cdot S+N}$ ob $\frac{1}{59 \cdot 575} = \frac{3}{178 \cdot 725} = \frac{3SS}{LL}$. Hinc ergo prodit $V \cdot \frac{s}{r} :: \frac{3SS}{4L \times S+N} \cdot 1$. Insuper est (per Coroll. 6. prop. 9. p. 1) $S+N \cdot S :: \sqrt{1+\frac{3S}{2L}} \cdot 1$, adeoque tandem $V \cdot \frac{s}{r} :: \frac{3S}{4L} \cdot \sqrt{1+\frac{3S}{2L}}$. Scribendo igitur $5^\circ. 8'\frac{1}{2}$ (inclinationem scilicet mediocrem) pro $\frac{s}{r}$ prodit V sive variatio tota inclinationis in transitu nodorum a syzygiis ad quadraturas aequalis $16'. 24''\frac{1}{2}$, quae apud *Newtonum* est $16'. 23''\frac{1}{2}$. Si variatio $16'. 24''\frac{1}{2}$ minuatur in ratione 69 ad 70, evadet $16'. 10''\frac{1}{2}$.

C o r o l l. VI.

ERat $V \cdot \frac{s}{r} :: \frac{3S}{4L} \cdot \sqrt{1+\frac{3S}{2L}}$; hincque $\frac{s}{r} + \frac{V}{2}$.

$\frac{s}{r}$ —

$\frac{s}{r} - \frac{V}{2} :: \sqrt{1 + \frac{3S}{2L}} + \frac{3S}{8L} . \sqrt{1 + \frac{3S}{2L}} - \frac{3S}{8L}$, ſive quamproxime $\frac{s}{r} + \frac{V}{2} . \frac{s}{r} - \frac{V}{2} :: \sqrt{1 + \frac{3S}{2L}} . 1 :: S + N . S$, id eſt, inclinatio maxima eſt ad inclinationem minimam mediocrem ut motus medius ſolis a nodo ad motum medium ſolis, & differentia harum inclinationum, ſeu variatio tota inclinationis eſt ad inclinationem minimam mediocrem; ut motus nodi medius ad motum medium ſolis. Deſcribatur ergo centro T ellipſis QB cujus axis major TQ ſit ad axem minorem TB, ut motus medius ſolis a nodo ad motum medium ſolis, ſicuti dictum eſt in Coroll. 6. prop. 9. p. [illegible], & ſi recta TQ ſive TS exhibet inclinationem orbis lunae maximam, nodis ſcilicet ſyzygias occupantibus, recta SB exhibebit variationem inclinationis in tranſitu nodorum a ſyzygiis ad quadraturas, & TB inclinationem minimam: & quia variatio haec creſcit (per Coroll. praeced.) in ratione duplicata ſinus diſtantiae cujuſvis QP ſolis a nodo, id eſt, ut $\overline{PK}^2$, ſive, ſi ellipſis ſecet TP in C, ut PC; radius ellipſeos TC exhibebit, ut patet, inclinationem orbis lunaris mediocrem pro menſe illo, quo nodi diſtant a ſole angulo QTP. Eadem igitur conſtructione, circuli ſcilicet & ellipſeos, exhiberi poſſunt, uti deprehendiſſe ſe docet D. *Machin*, tum motus & aequatio nodorum, tum inclinatio & variatio inclinationis orbitae lunaris, pro quolibet ſolis & nodorum ad ſe invicem ſitu; ac proinde facili calculo conſtruentur pro his motibus tabulae.

Si

Si supponeretur $S + N, S :: \sqrt{1 + \frac{3 S \times 69 \times 0.995464}{2 L \times 70}}$. 1, ut in Coroll. 3. prop. 10. p. 1. definitum est pro orbe elliptico, variatio inclinationis praefata prodiret 16'. 8".

Observandum autem variationem supra definitam esse differentiam inter inclinationem maximam & minimam mediam, quatenus nimirum locus lunae in orbe suo non consideratur. Nam si nodi constituantur in quadraturis, minuitur inclinatio in transitu lunae a quadraturis ad syzygias angulo 2'. 43". Hujus decrementi dimidium 1'. 21"$\frac{1}{2}$ addatur variationi 16'. 24"$\frac{1}{2}$, & variatio tota erit 17'. 46", adeoque si inclinatio, ubi nodi versantur in syzygiis, fuerit 5°. 17'. 20"; eadem, ubi nodi sunt in quadraturis, & luna in syzygiis, erit 4°. 59'. 34". Si decrementum sit 2'. 40"$\frac{1}{2}$, & variatio 16'. 10"$\frac{1}{2}$, uti supra indicavimus, erit variatio tota 17'. 31", & maxima inclinatione existente 5°. 17'. 20", minima erit in syzygiis lunaribus 4°. 59'. 49".

DE AEQUATIONIBUS ANNUIS MOTUUM LUNARIUM.

HActenus motuum Lunarium inaequalitates consideravimus quales forent si vis solis in singulis orbis terrae punctis maneret semper eadem: cum autem vis illa decrescat in ratione triplicata distantiae terrae a sole, juxta eamdem legem variantur inae-

inaequalitates praedictae, sed & aliae de novo nascuntur. Sic dum terra progreditur a perihelio ad aphelium, ob decrementum actionis solaris contrahitur orbis lunae, & citius luna revolvitur: in descensu vero ab aphelio ad perihelium, ob incrementum actionis solaris dilatatur orbis lunae, quae idcirco tardius revolvitur; hincque oritur aequatio annua medii motus lunaris. Ob eamdem causam Apogaeum, & nodi tardius moventur in aphelio terrae, velocius in perihelio. Aequationes hisce inaequalitatibus genitas methodo generali conabimur investigare.

PROP. II. PROBLEMA.

Revolvatur corpus in ellipsi parum excentrica, ita ut motus ejus angularis e foco spectatus sit, ut distantiae ipsius a foco dignitas n *inverse, & determinanda sit differentia inter motum verum, & motum medium.*

Ellipseos ABD (*Fig.* 21.) centrum sit C, focus S, axis major AD, axis minor BG. Centro S & radio, qui sit medium proportionale inter AC, & BC sive, quia excentricitas exigua supponitur, radio SB, describatur circulus HBO, & ad punctum ellipseos quodlibet P inter B, & A ducatur recta SP secans circulum in M. Motus mediocris instantaneus corporis in B dicatur m, & in loco P juxta hypothesim hic motus erit $m \times \frac{SB^n}{SP^n} =$

(ob

(ob $\overline{SP}^{n} = \overline{SB + PM}^{n} = \overline{SB}^{n} + n \times \overline{SB}^{n-1} \times PM$) $m \times \overline{1 - \frac{n \times PM}{SB}}$; excessus igitur instantaneus motus medii supra verum in loco P est aequalis $m \times \frac{n \times PM}{SB}$. Exponat jam sector quam minimus SPp tempori proportionalis motum momentaneum illum, ad quem motus caeteri in dato systemate vulgo referuntur, & sit S ad Q ut motus ille ad motum m pro tempore dato: unde scripto $\frac{Q}{S} \times SPp$ pro m, si Sp secet circulum in m, erit excessus supra inventus aequalis $\frac{n \times Q \times PM}{S \times SB} \times SPp$ sive $\frac{n \times Q}{2S} \times PM \times Mm$ quamproxime, hoc est, excessus ille aequalis est spatio $PMmp$ ducto in $\frac{n \times Q}{2S}$. Unde si motus initium sumatur, Astronomorum more, ab apside A, differentia tota inter motum verum & medium, quo tempore describitur arcus AP, hoc est, ipsa aequatio motus aequabitur spatio $APMH$ ducto in $\frac{n \times Q}{2S}$. Ubi corpus revolvendo pervenit ad locum V puncto B inferiorem; ducto radio SVE, spatium BVE intra circulum cadit fitque negativum, ideoque aequatio motus eo in loco fit aequalis differentiae spatiorum ABH, BVE, ductae in $\frac{n \times Q}{2S}$. Cumque in descen-

su

ſu ab apſide ſumma A ad apſidem imam D motus medius verum antecedat, atque decreſcente diſtantia SP creſcere ſupponatur motus, aequatio motus toto eo tempore ſubduci debet e motu medio; in locis A & D nulla eſt; in oppoſita autem parte DGA motui medio addendam eſſe aequationem ſimili ratiocinio patebit; in puncto autem B, vel B proximo aequatio ipſa fit maxima. *Q. E. I.*

Coroll. I.

In hoc computo approximationibus utimur ſupponentes excentricitatem SC eſſe admodum exiguam; unde area, qua deſignanda foret aequatio maxima, contenta nimirum inter ellipſim ex parte AB, & circulum cujus radius foret medius proportionalis inter ſemiaxem majorem CA, & minorem CB, aequabitur quamproxime ſemiſummae arearum ABH, BDO. Eſt autem, ſcribendo C pro circumferentia $HBOG$, $ABH = \overline{\tfrac{1}{4}C + SC} \times \tfrac{1}{2}BC - \overline{\tfrac{1}{4}C - SC} \times \tfrac{1}{2}BS$, & $BDO = \overline{\tfrac{1}{4}C + SC} \times \tfrac{1}{2}BS - \overline{\tfrac{1}{4}C - SC} \times \tfrac{1}{2}BC$, adeoque ſemiſumma praedicta aequalis eſt $\frac{SC}{2} \times \overline{BS + BC}$ ſive $SC \times BC$ quamproxime. Haec igitur ſemiſumma, ſeu motus quem deſignat eſt ad quartam partem ellipſeos, ſeu ad motum medium quem deſignat, hoc eſt, ad angulum 90° quartam ſcilicet partem revoluvolutionis totius, ut 2 SC ad $\frac{1}{4}$ C; quare aequatio maxima fit $\frac{n \times Q \times SC \times 90°}{S \times \frac{1}{4} C}$.

Tum si ex centro C ellipseos agatur recta CI parallela tangenti ex puncto P ductae, & secet SP in I, liquet ex conicis esse $PI = SM$, adeoque $PM = SI$; sed est CI fere perpendicularis in SP, hincque similia evadunt triangula SCI, SMN, ducta scilicet MN perpendiculari in SA: unde est SC ad SI ut SM ad SN, adeoque est SI vel PM proportionalis cosinui SN, & cum sit SM ad SN ut fluxio arcus HM ad fluxionem ipsius sinus MN, adeoque data fluxione arcus HM, est SI vel PM proportionalis fluxioni sinus MN, ac propterea area tota $APMH$ proportionalis est sinui MN, hoc est, sinui motus veri. Quoniam vero motus verus parum differt a motu medio, hujus sinum usurpare licet prima vice ut habeatur illarum motuum differentia; haecque motui medio addita vel ab eodem ablâta dabit motum verum proxime, cujus sinu secunda vice adhibito magis accurata prodibit aequatio motus pro tempore quolibet dato.

COROLL. II.

IN sequentibus designabit S motum medium apparentem solis, & ellipsis ABD orbem terrae. Unde si agatur de motu apparente solis vero, qui est in duplicata ratione reciproca distantiae SP, fit $n = 2$, & $Q = S$, hincque aequatio centri solis maxima ex coroll. praeced. prodit $\frac{2\,SC \times 90^\circ}{\frac{1}{4}\,C}$ five $2\,SC$ ducta in arcum $57^\circ.29578$ radio AC aequalem hoc eft, exiftente AC vel $SB = 1$, & $SC = 0.016\frac{11}{12}$, aequalis angulo $1^\circ.\ 56'.\ 19''$, quod verum effe aliunde norunt Aftronomi. Inde & per idem corollarium dato arcu anomaliae mediae obtinebitur anomalia vera.

Coroll. III.

Vis qua generantur motus apogaei & nodorum lunae crefcit in ratione triplicata diftantiae terrae a fole inverfe, atque adeo hoc in cafu eft $n = 3$. Motus autem medius apogaei eft ad motum folis, hoc eft, eft Q ad S (per prop. 12. part. 1) ut $40^\circ.\ 40'.\ 38''$. ad 360°, five ut 1 ad 8.851. His igitur valoribus fubftitutis in formula generali $\frac{n \times Q \times SC \times 90^\circ}{S \times \frac{1}{4}\,C}$, aequatio maxima apogaei fit $\frac{3\,SC \times 90^\circ}{\frac{1}{4}\,C \times 8.851}$ vel, fcripto $Æ$ pro aequatione maxima centri folis $\frac{3}{2 \times 8.851}$ $Æ = 19'.\ 43''$. Item eft motus nodorum ad motum folis, id eft, Q ad S (per coroll. 3. prop. 10. part. 1.) ut $19^\circ.\ 18'$. ad 360°. five ut 1 ad 18.653: unde habetur aequatio maxima nodorum $\frac{3\,SC \times 90^\circ}{\frac{1}{4}\,C \times 18.653} = \frac{3}{2 \times 18.653}\,Æ = 9'.\ 20''$. Si motus nodorum ftatuatur $19^\circ.\ 20'\frac{1}{2}$, uti ex obfervationibus colligitur, aequatio evadit $9'.\ 22''\frac{1}{2}$. Eamdem pofuit Newtonus

nus 9'. 24". ob motum nodorum assumptum 19°. 21'. 21". 50'''. Aequationes istae in omnibus locis proportionales sunt, ut patet, aequationi centri solis. Additur vero aequatio prior, & subducitur posterior ubi terra pergit a perihelio suo ad aphelium; & contrarium fit in opposita orbis parte.

Coroll. IV.

Hinc etiam colligitur aequatio medii motus lunaris orta scilicet ex varia contractione & dilatatione ejus orbis, ut supra expositum est. Nam si radius orbis, in quo luna vi solius terrae attractionis revolveretur ponatur aequalis 1, constat ex demonstratis in prop. 2. & ejus coroll. part. 1. radium illum ob vim ablatitiam solis ϕ evadere $1 + \frac{\phi}{1 - 5\phi}$. Quamobrem, cum motus angulares in diversis orbibus sint ut quadrata radiorum reciproce ob aream aequalem eodem tempore semper descriptam, erit motus in orbe priore ad motum in posteriore, hoc est, ad ipsum motum medium lunae quem voco M, ut 1 ad $1 + \frac{2\phi}{1 - 5\phi}$, sive, ut 1 ad $1 + 2\phi$ quamproxime, adeoque differentia horum motuum aequalis est $\frac{2\phi M}{1 + 2\phi}$. Substituatur hic valor pro Q in formula superius data, & 3 pro n quia vis ϕ crescit in triplicata ratione inversa distantiae terrae a sole, & aequatio maxima medii motus lunae in mediocri proxime telluris a sole distantia fit $\frac{3SC \times 90^\circ}{\frac{1}{4}C} \times \frac{2\varphi M}{S \times \overline{1 + 2\varphi}}$, ſive, ſi T & L denotent tempora periodica ſolis & lunae, quia eſt $M.S::T.L$, & $2\varphi = \frac{LL}{TT}$, haec aequatio evadit $\frac{3SC \times L \times 90^\circ}{\overline{1 + 2\varphi} \times \frac{1}{4}C \times T} = \frac{3L}{2T \times \overline{1 + 2\varphi}}$ $Æ = 12'.\ 58''\frac{1}{2}$, quae diminuta in ratione compoſita ex ratione 69 ad 70 ob formam ellipticam orbis lunae, & ex ratione temporis lunae periodici ad tempus ſynodicum ob motum ſolis, evadit 11'. 50"; eam computu ſuo 11'. 51" ſe inveniſſe declarat Newtonus. Si aequatio praedicta $\frac{3L \times Æ}{2T \times \overline{1 + 2\varphi}}$ minuatur in ratione revolutionis periodicae L ad ſynodicam P, & expungatur terminus 2φ, utpote exiguus, fit $\frac{3LL}{2PT} Æ$; quam formulam etiam ſe inveniſſe tradit Clar. *Machin.*

Hanc autem aequationem patet eſſe ubique proportionalem aequationi centri ſolis, & addi debere medio motui lunae, ubi terra pergit ab aphelio ad perihelium, & in oppoſita orbis parte ſubduci.

S C H O L I U M.

At ne forte minus accurate deduci videatur aequatio motus medii lunaris methodo ſuperiori corollario expoſita, eamdem directe colligere libet ad modum propoſitionis hujus. Eſto $SB = 1$, & defidesignet m motum medium instantaneum lunae terra existente in B, & μ motum lunae instantaneum medium in orbe contracto quem describit terra versante in P, eritque $\mu . m :: 1 + 2\phi . 1 + \frac{2\phi}{SP^3} :: 1 + 2\phi . 1 + 2\phi - 6\phi \times PM$, adeoque $\mu - m = \frac{6\phi m \times PM}{1 + 2\phi}$ quamproxime. Exponat jam ut prius sector SPp motum instantaneum apparentem solis, eritque $m = \frac{T}{L} \times SPp$, & $\mu - m = \frac{6\phi T \times PM}{L \times \overline{1 + 2\phi}} \times SPp = \frac{3\phi T}{L \times \overline{1 + 2\phi}} \times PM \times Mm$, ac reliqua parte hujus demonstrationis peracta; uti in propositione & ejus corollario primo, emergit aequatio $\frac{3\,SC}{\frac{1}{4}\,C} \times \frac{2\phi T \times 90^\circ}{L \times \overline{1+2\phi}} = \frac{3\,SC \times L \times 90^\circ}{\overline{1+2\phi} \times \frac{1}{4}\,C \times T}$ quemadmodum supra invenimus.

Coroll. V.

Ex dictis liquet hujusmodi aequationes omnes proportionales esse, caeteris manentibus, excentricitati orbis magni SC.

Coroll. VI.

In ultima propositione partis primae hujus theoriae determinavimus differentiam inter maximam, & minimam excentricitatem generari aequalem 0.02355, in transitu scilicet Apogaei Lunaris a quadraturis ad syzygias, & terra existente in mediocri sua a sole distantia. Unde sinus differentiae in-

inter aequationem maximam, & minimam centri lunae erit quamproxime 2×0.02355 ad radium 1, sive haec differentia erit $2 \times 0.02355 \times 57^{\circ}.29578$, vel $2 \times 0.02355 \times \frac{90^{\circ}}{\frac{1}{4} C}$: haec autem differentia, sive aequatio non generatur eodem tempore, quo sol describit 90 gradus, sed quo sol recedit ab Apogaeo Lunae 90 gradibus, adeoque motus hujus differentiae, hoc est, velocitas mediocris qua generatur haec aequatio est ad velocitatem solis (tempora enim sunt inverse ut motus), ut (scribendo S pro motu solis, & A pro motu medio Apogaei lunae) $2 \times 0.02355 \times \frac{90^{\circ}}{\frac{1}{4} C} \times \overline{S - A}$ ad S. Ponatur igitur $2 \times 0.02355 \times \frac{90^{\circ}}{\frac{1}{4} C} \times \frac{S - A}{S}$ loco $\frac{Q \times 90^{\circ}}{S \times \frac{1}{4} C}$ in formula $\frac{n \times Q \times SC \times 90^{\circ}}{S \times \frac{1}{4} C}$, eritque $\frac{n \times SC \times 2 \times 0.02355 \times 90^{\circ}}{\frac{1}{4} C} \times \frac{S - A}{S}$. Haec autem aequatio crescit, ut vis solis qua generatur, & tempus transitus apogaei lunae a quadraturis ad syzygias conjunctim: vis autem solis augetur in ratione triplicata distantiae terrae a sole inverse; & tempus transitus apogaei lunae a quadraturis ad syzygias est inverse ut motus solis ab apogaeo sive, ob tarditatem motus apogaei lunae respectu motus solis, proxime ut ipse motus solis inverse, hoc est, directe in duplicata ratione distantiae terrae a sole. Aequatio igitur praedicta augetur in ratione simpliplici inverſa diſtantiae terrae a ſole, adeoque erit $n = 1$; quare prodibit aequatio variationis, ſive aequatio ſecunda centri lunae aequalis $2'.\,26''$. Si loco 0.02355 ſive $2 \times 0.01177\frac{1}{2}$, uſurpetur cum Newtono quantitas $2 \times 0.01172\frac{3}{4}$, evadit aequatio praedicta $2'.\,25''$, quemadmodum ſtatuit Newtonus.

DE AEQUATIONE MEDII MOTUS LUNARIS QUAE PENDET A VARIO SITU NODORUM LUNAE.

CUm planum orbis Lunaris non coincidat cum plano Eclipticae, inde fit ut pars vis ſolaris in augenda vel minuenda orbis inclinatione inſumatur, adeoque minus a terra luna retrahitur quam in praecedentibus ſuppoſuimus. Maxima igitur eſt actio ſolis, qua luna a terra diſtrahitur, ubi linea nodorum per ſyzygias tranſit, minima ubi per quadraturas, indeque orbis lunaris paulo major eſt in priore caſu quam in poſteriore. Aequatio, quam haec inaequalitas generat in medio motu lunae, maxima eſt ubi nodi in octantibus cum ſole verſantur, & evaneſcit ubi ſunt in ſyzygiis vel quadraturis: ut autem definiatur, lemma ſequens praemittitur.

PROP. III. LEMMA.

Invenire decrementum actionis solaris lunam a terra distrahentis ortum ex inclinatione plani orbis lunaris ad planum Eclipticae.

DEsignet $QSqs$ (*Fig.* 22.) orbem circularem lunae cujus centrum T; sit Qq linea quadraturarum, Ss linea syzygiarum, ND linea nodorum, & in lineam solis & terrae centra jungentem demittatur perpendiculum NR. Esto P locus lunae, & per rectam PO ipsi ND parallelam transire intelligatur planum plano Eclipticae parallelum, in quo duci intelligatur versus solem linea PM aequalis triplo perpendiculi a puncto P demissi in planum plano Eclipticae perpendiculare, sive aequalis quamproxime $3PK$, hoc est, triplo perpendiculi a puncto P in Qq demissi. Tum ex M in rectam PO productam acto perpendiculo MH, & in planum orbis lunae perpendiculo ML, junctisque HL, PL, similia erunt triangula PMH, TNR, adeoque $TN . NR :: PM\,(3PK) . MH$, & positis r pro radio, & s pro sinu inclinationis orbitae lunaris ad planum Eclipticae, quae inclinatio hic constans supponi potest, erit $r . s :: MH . ML$, unde conjunctis rationibus prodit $ML = \frac{3PK \times NR}{TN} \times \frac{s}{r}$, & $PL = \sqrt{PM^2 - ML^2} = 3PK \sqrt{1 - \frac{NR^2}{TN^2} \times \frac{ss}{rr}} =$ (quia exigua est inclinatio)

3 *PK*

$3 PK \times \overline{1 - \frac{\overline{NR}^2}{2TN^2} \times \frac{ss}{rr}}$. Resolvatur jam vis PM in vires ML, PL, quarum neglecta ML, quippe quae variationem in orbis inclinatione solummodo inducit, erit TP ad PK ut vis PL, hoc est, $2\varphi \times \frac{3PK}{TP} \times \overline{1 - \frac{\overline{NR}^2}{2\overline{TN}^2} \times \frac{ss}{rr}}$ ad vim $2\varphi \times \frac{3\overline{PK}^2}{\overline{TP}^2} \times \overline{1 - \frac{\overline{NR}^2}{2\overline{TP}^2} \times \frac{ss}{rr}}$ quae amovet lunam a terra in loco P. Si autem tempore unius revolutionis quasi immota manere supponatur positio nodorum, differentia actionum totalium vis istius toto eo tempore impressarum, & vis constantis 2φ deprimentis lunam ad terram per circumferentiam divisa aequalis est (ut sequitur ex demonstratis initio articuli de motu apogaei in parte 1ª.) $\varphi \times \overline{1 - \frac{3\overline{NR}^2}{2\overline{TP}^2} \times \frac{ss}{rr}}$: hac igitur vi lunam a terra distrahi uniformiter per totam revolutionem supponi potest. De parte ipsius $\varphi \times 1$ jam superius actum est; reliqua ergo pars $\frac{3\varphi \times \overline{NR}^2}{2\overline{TP}^2} \times \frac{ss}{rr}$ variabilis pro vario situ nodorum hic duntaxat in considerationem venit. *Q. E. I.*

L PROP.

PROP. IV. PROBLEMA.

Æquationem motus medii lunaris a supradicta causa oriundam investigare.

Constat ex Coroll. prop. XI. part. I. quod, si TP, quem pono aequalem 1, foret radius circuli quem luna non agente vi $\frac{3\phi \times \overline{NR}^2}{2} \times \frac{ss}{rr}$ describeret, accedente illa vi lunam ad terram urgente radius circuli quem describere censebitur erit

$$1 - \frac{\frac{3\phi \times \overline{NR}^2}{2} \times \frac{ss}{rr}}{1 + \frac{15\phi \times \overline{NR}^2}{2} \times \frac{ss}{rr}} \text{ sive } 1 - \frac{3\phi \times \overline{NR}^2}{2} \times \frac{ss}{rr}$$

quamproxime ob evanescentem fere quantitatem ϕss. Sed quoniam haec vis $\frac{3\phi \times \overline{NR}^2}{2} \times \frac{ss}{rr}$ non agit tantum tempore revolutionis lunae, sed toto tempore quo nodus transit a syzygia ad quadraturam, ideo augeri debet ejus actio in ratione temporis quo arcus quam minimus Nn motu solis a nodo percurritur ad tempus quo motu lunae idem arcus percurri posset, hoc est, in ratione motus lunae ad motum solis a nodo. Sit ergo L motus medius lunae, S motus medius solis, N motus medius nodorum, eritque $S+N$ motus medius solis a nodo, & decrementum radii, nodo translato de n in N, est

est $\frac{3\Phi \times \overline{NR}^2}{2} \times \frac{ss}{rr} \times \frac{L}{S + N}$ quod, nodo ad quadraturam appellente, fit $\frac{3\Phi}{2} \times \frac{ss}{rr} \times \frac{L}{S + N}$. Motus autem crescit in duplicata ratione radii reciproce, id est, in ratione $1 - 3\,\varphi \times \overline{NR}^2 \times \frac{ss}{rr} \times \frac{L}{S + N}$ reciproce, adeoque differentia hujus motus est ut $3\,\varphi \times \overline{NR}^2 \times \frac{ss}{rr} \times \frac{L}{S + N}$, hoc est, in ratione duplicata sinus NR distantiae nodi a syzygia: quare exponendo motus lunae tum uniformem tum variabilem per areas ellipseos & circuli, erit hujus ellipseos axis major ad minorem (per Coroll. 1. prop. 7) ut $1 + \frac{3\varphi}{4} \times \frac{ss}{rr} \times \frac{L}{S + N}$ ad $1 - \frac{3\varphi}{4} \times \frac{ss}{rr} \times \frac{L}{S + N}$, bisecando scilicet decrementum maximum radii $\frac{3\varphi}{2} \times \frac{ss}{rr} \times \frac{L}{S + N}$, & ponendo radium circuli quem luna describit motu medio, id est, radium circuli quem luna describit dum nodus in octantibus cum sole versatur, aequalem 1. Quo circa (per Coroll. 3. prop. 7. part. 1.) ut summa axium 2 ad eorum differentiam $\frac{3\Phi}{2} \times \frac{ss}{rr} \times \frac{L}{S + N}$, ita est radius r ad sinum t anguli aequationis maximae; adeoque ille angulus sive $\frac{t}{r} = \frac{3\Phi}{4} \times \frac{ss}{rr} \times \frac{L}{S + N} =$ (ob $\varphi = \frac{SS}{2LI}$) $\frac{3SS}{8I \times \overline{S + N}} \times \frac{ss}{rr}$. Sed demonstratum est in Coroll. 5°. prop. 1. quod, si V designet variationem incli-

inclinationis orbis lunaris genitam tempore transitus nodorum a syzygiis ad quadraturas, est V. $\frac{s}{r} :: \frac{3SS}{4L \times \overline{S+N}} . 1$, adeoque $\frac{3SS}{4L \times \overline{S+N}} = V \times \frac{r}{s}$; est igitur $\frac{t}{r} = \frac{V \times s}{2r}$, hoc est, *Radius est ad sinum inclinationis mediocris, ut dimidium variationis ipsius inclinationis ad aequationem maximam quaesitam*. Est autem inclinatio mediocris quasi $5°.8'\frac{1}{2}$ cujus sinus est 0.0896 ad radium 1, & ex praedicto Coroll. est $V = 16'.24''\frac{1}{2}$, unde prodit aequatio maxima medii motus lunaris, quam hac propositione investigamus aequalis $44''$, quae aucta in ratione temporis lunae synodici ad tempus periodicum, quia hic de revolutionibus synodicis agitur, & diminuta in ratione 69 ad 70 ob formam ellipticam orbis lunaris, evadit $47''$, prout se invenisse docet Newtonus. Haec est aequatio medii motus lunae in octantibus nodi cum sole, in aliis locis habetur per Coroll. 3. prop. 7. part. 1. Additur vero medio motui lunae, si sol distat a nodo sibi proximo in antecedentia, subducitur si in consequentia, & evanescit ubi nodi sunt in syzygiis vel quadraturis. Ita se habet in mediocri solis a terra distantia, in aliis solis distantiis haec aequatio maxima in octantibus nodorum est reciproce, ut cubus distantiae solis a terra, ideoque in perigaeo solis ad $49''$, in apogaeo ejus ad $45''$. circiter ascendit. *Q. E. I.*

DE

DE AEQUATIONE MOTUS MEDII LUNARIS QUAE PENDET A SITU APOGAEI LUNAE.

Ex antea demonſtratis liquet apſides orbis lunae non manere immotas, ſed motu ſuo medio ferri in conſequentia: pro vario autem ſitu lineae apſidum varia eſt actio ſolis in lunam, major nimirum ubi linea apſidum tranſit per ſolem, quam ubi eadem ad rectos eſt angulos cum linea ſolem ac terram jungente; unde orbis lunaris paulo magis dilatatur in priore caſu quam in poſteriore, adeoque protrahitur lunae tempus periodicum in tranſitu apogaei a quadraturis ad ſyzygias. Protractio haec generat inaequalitatem in ipſius motu medio aequatione proportionali compenſandam.

PROP. V. PROBLEMA.

Praedictam aequationem invenire.

Orbem lunae exhibeat ellipſis APB, cujus axis major ſit AB (*Fig.* 23.), & focus, in quo terra locatur, T; ſit TQ linea quadraturarum, & ST linea ſyzygiarum. Centro T, & radio ſemiaxi majori aequali deſcribatur circulus HNO ſecans AB in H, & TP jungentem lunam & terram in N: ex punctis H, P, N, in TQ agantur perpendicula HL, PK, NI, & ex N in

AB perpendiculum NR. Spatium $\frac{2\phi b^3}{1-5\phi b^2}$, quo augetur (per prop. 11. part. 1.) transversa diameter orbis propter vim ϕ, dicatur K, & fiat, ut tota ellipsis E ad K, ita sector ellipseos quam minimus TPp, sive $\frac{\overline{TP}^2 \times Nn}{2Tn}$ ad spatium $\frac{K \times \overline{TP}^2 \times Nn}{E \times 2TN}$ per vim ϕ descriptum, quo tempore luna percurrit arcum Pp. Sed quoniam in loco quovis P vis lunam a terra amovens aequalis est $2\phi \times \frac{3\overline{PK}^2}{TN \times TP}$ sive, ob $NI = \pm \frac{HL \times TR}{TN} \pm \frac{TL \times NR}{TN}$ & $PK = \frac{NI \times TP}{TN}$, aequalis $\frac{6\phi \times TP}{\overline{TN}^5} \times \overline{\pm HL \times TR \pm TL \times NR}^2$, fiat ut vis ϕ ad vim mox inventam, ita spatium $\frac{K \times \overline{TP}^2 \times Nn}{E \times 2TN}$ ad spatium $\frac{3K \times \overline{TP}^3 \times Nn}{E \times \overline{TN}^6} \times \overline{\overline{HL}^2 \times \overline{TR}^2 + \overline{TL}^2 \times \overline{NR}^2}$, supprimendo terminum ambiguum $\pm 2HL \times TR \times TL \times NR$ utpote in dimidia parte revolutionis positivum, in reliqua negativum: hoc spatium est incrementum diametri genitum vi lunam in loco P distrahente a terra tempore, quo describit arcum Pp. Sumatur summa horum incrementorum tempore periodico in ellipsi $APBA$ genitorum, & ponendo $TN = 1$, semiaxis minor $= b$, excentricitas $= e$, $HL = m$, quia est $TP = \frac{bb}{1 \pm e \times TR} = bb \pm bbe$

$bbe \times TR + bbee \times \overline{TR}^2 \mp$ &c. ex natura ellipseos, erit haec summa $3\,b^5 K \times \overline{1 + \frac{3e^2}{2} + 3m^2e^2}$.

Cum autem vis praefata non agat duntaxat tempore revolutionis lunae in orbe suo, sed toto tempore quo linea apsidum transit a quadratura ad syzygiam, ideo augeri debet ejus actio in ratione temporis, quo arcus Nn motu solis ab Apogaeo percurritur ad tempus, quo motu lunae idem arcus percurri posset, hoc est, in ratione motus lunae ad motum solis ab Apogaeo. Sit ergo L motus medius lunae, S motus medius solis, A motus medius Apogaei, eritque $S - A$ motus solis ab Apogaeo, & incrementum diametri orbis lunae, linea Apogaei translata de N in n, evadit $3\,b^5 K \times \frac{L}{S-A} \times \overline{1 + \frac{3e^2}{2} + 3m^2e^2}$; quod Apogaeo in quadraturis versante, fit $3\,b^5 K \times \frac{L}{S-A} \times \overline{1 + \frac{3e^2}{2}}$; in syzygiis autem, $3\,b^5 K \times \frac{L}{S-A} \times \overline{1 + \frac{9e^2}{2}}$. Horumce duorum incrementorum bisecetur differentia $3\,b^5 K \times \frac{L}{S-A} \times 3e^2$, & posita mediocri orbis diametro transversa aequali 2, diameter maxima erit $2 + \frac{9b^5e^2K}{2} \times \frac{L}{S-A}$, & minima $2 - \frac{9b^5e^2K}{2} \times \frac{L}{S-A}$: tempora autem periodica in ellipsibus quarum istae sunt diametri sunt quamproxime in duplicata ratione ipsarum diametrorum

rum ob aequalem aream dato tempore semper descriptam, & motus medii sunt in ratione inversa temporum periodicorum. Cum itaque excessus incrementi $3\, b^5\, K \times \frac{L}{S-A} \times 3\, m^2\, e^2$ in qualibet orbis positione supra minimum est ut m^2, id est, ut quadratum sinus distantiae Apogaei a quadratura, patet motus istos, scilicet tum variabilem tum uniformem exponi posse, juxta propositionem septimam partis primae, per circulum & ellipsim cujus axis major est ad minorem ut $2 + \frac{9\, b^5\, e^2\, K}{2} \times \frac{L}{S-A}$ ad $2 - \frac{9\, b^5\, e^2\, K}{2} \times \frac{L}{S-A}$ sive, ut $1 + \frac{9\, b^5\, e^2\, K}{4} \times \frac{L}{S-A}$ ad $1 - \frac{9\, b^5\, e^2\, K}{4} \times \frac{L}{S-A}$; adeoque per Coroll. 3. dictae propositionis, est summa axium 2 ad eorum differentiam $\frac{9\, b^5\, e^2\, K}{2} \times \frac{L}{S-A}$ ut radius ad sinum aequationis maximae, quae proinde erit 2'. 20", & si augeatur in ratione revolutionis synodicae ad periodicam fit 2'. 31".

In solutione hujus problematis non habita est ratio vis solaris partis illius, quae lunam ad terram deprimit & proportionalis est radio *TP*; quippe quae per totam ellipsim continuata in quolibet lineae apsidum situ eadem maneat. Aequationem hanc per theoriam computasse se non indicat Newtonus, sed ad 3'. 45". circiter ascendere collegit ex Phaenomenis. Forsan illi non suppetebat observationum numerus ex quibus tuto derivari posset, vel inter

va-

varias motus lunaris inaequalitates unam istam ab aliis certo secernere fas non erat. Caeterum maxima est haec aequatio, ut patet, cum Apogaeum lunae versatur in octante cum sole, & nulla cum ad quadraturas vel syzygias pervenit; in aliis habetur per Coroll. 3. prop. 7. part. 1, & motui medio additur in transitu Apogaei lunae a solis quadratura ad syzygiam, & subducitur in transitu Apogaei a syzygia ad quadraturam. Item augetur ac diminuitur in triplicata ratione distantiae solis a terra inverse, ideoque in maxima solis distantia est 2'. 38''. & in minima 2'. 24''. *Q. E. I.*

DE AEQUATIONE SEMESTRI APOGAEI SECUNDA.

DE prima & principali Apogaei aequatione semestri dictum est in prop. 13. part. 1., nunc aliam aequationem inquirimus, quam semestrem secundam dicimus, quae motum Apogaei medium afficit propter dimensionem modo majorem modo minorem orbitae lunaris. Cum enim solis actio major est in lunam, uti diximus, ubi linea apsidum transit per solem, quam ubi eadem jacet in linea quadraturarum, hinc augetur motus medius Apogaei in transitu Apogaei a quadraturis ad syzygias: & haec inaequalitas sive acceleratio generat aequationem, quae motui medio addenda est in transitu Apogaei a syzygiis ad quadraturas, & subducenda in transitu ejusdem a quadraturis ad syzygias.

PROP.

PROP. VI.

Aequationem praedictam invenire.

IN propositione praecedente loco K ponatur A pro motu medio Apogaei, & simili prorsus, ut ibi, facto ratiocinio, prodibit motus Apogaei tempore lunae periodico pro quolibet Apogaei situ $3\,b^5 A \times \overline{1 + \frac{3e^2}{2} + 3\,m^2 e^2}$, quod in quadraturis Apogaei evadit $3\,b^5 A \times \overline{1 + \frac{3e^2}{2}}$; in ejusdem syzygiis, $3\,b^5 A \times \overline{1 + \frac{9e^2}{2}}$. Horum motuum bisecetur differentia $9\,b^5 e^2 A$, & posito $S - A$ pro motu medio solis ab Apogaeo lunae, erit motus solis ab Apogaeo lunae in quadraturis Apogaei ad motum solis ab Apogaeo in ejusdem syzygiis ut $S - A + \frac{9\,b^5 e^2}{2} A$ ad $S - A - \frac{9\,b^5 e^2}{2} A$ quamproxime, & exponendo hos motus, ut soleo, per circulum & ellipsim cujus axis major erit ad minorem in ratione $\sqrt{S - A + \frac{9\,b^5 e^2}{2} A}$ ad $\sqrt{S - A - \frac{9\,b^5 e^2}{2}}$, sive $1 + \frac{9\,b^5 e^2}{4} \times \frac{A}{S-A}$ ad $1 - \frac{9\,b^5 e^2}{4} \times \frac{A}{S-A}$ quamproxime; erit summa axium 2 ad eorum differentiam $\frac{9\,b^5 e^2}{2} \times \frac{A}{S-A}$ ut radius ad sinum aequationis

nis

nis maximae in octantibus Apogaei, quae idcirco erit 2′. 58″. In aliis locis habetur haec aequatio per Coroll. 3. prop. 7. Item augetur ac diminuitur in ratione triplicata diſtantiae terrae a ſole inverſe, adeoque in maxima ſolis diſtantia fit 2′. 49″, in minima 3′. 7″. Aequationem hanc non memorat Newtonus. *Q. E. I.*

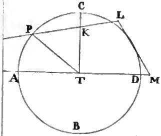
FINIS

Pag.	lin.	Errata.	Corrige.
7.	13. 21.	*ABCQ* .	*KBCQ*
8.	7.		
8.	25.	*ML*	*MQ*
9.	20.	2, & 4	3, & 5
12.	19.	*Maelaurin.*	*Maclaurin.*
	22.	ſe ut	ſecet
13.	1.	poſſet.	poſſet;
18.	14.	*Ad DD*	*ad* 4 *DD*
28.	3.	*Fig.* 3	*Fig.* 3, *&* 4
	7.	$\overset{2}{TQ}$.	$\overset{2}{\overline{TE \times TQ}}$
	10.	circulum	(Fig. iv, 3, & 4) circulum
29.	3.	*RN* (Fig. 9),	*RN*,
	11.	hac	haec
	21.	$\frac{DA}{2}$	$\frac{CA}{2}$
30.	3.	$\overset{2}{\overline{1-\frac{DC}{8}}} \times \frac{D}{8}$.	$\overset{2}{\overline{1-2DC}} \times \frac{D}{8}$
33.	16.	$C \times 59 \cdot 575$	$\frac{59 \cdot 575}{C}$
	23.	Fig. 10.	Fig. 9
	26.	quieſceret	quieſceret
37.	18.	*EQK*	*EQX*
	28.	Fig. 10	Fig. 9
	29.	*QEN*	*EQN*
38.	5. 8.	10	9
	12.	quantitatum	quantitatum (Fig. 11.)

41. 9.

Pag.	lin.	Errata.	Corrige
41.	9.	similiae	similia
	10.	MQ	Mq
43.	7.	. Erat	ad 1. Erat
44.	9.	$2'''$	$21'''$
48.	5.	terra	terrae
49.	2.	TM	TM^2
51.	17.	4°	40°
62.	24.	triangula similia	triangula rectangula
64.	19.	527 . 59	527 X 59
65.	3.	quadraturis	quadraturas
	7.	est	sit
66.	7.	$2\,\overline{ST}^2$	$.\,2\,\overline{ST}^2$
73.	17.	illa	illo

Praeterea pag. 8 lin. 19 videtur redundare illud = & punctum V (Fig. 3, & 4) coincidere cum T.



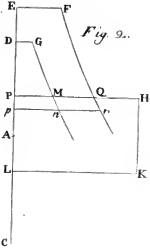
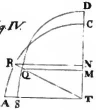


Fig. 2.

Fig. IV.



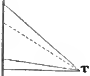
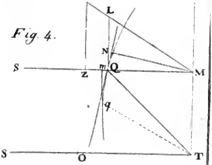


Fig. 4.



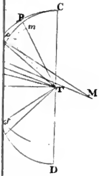


Fig 6.

Fig. 7.

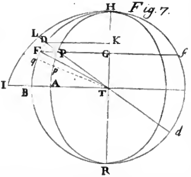


Fig. 10.

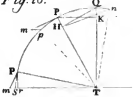


Fig. 9.

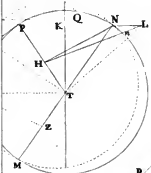


Fig. 13.

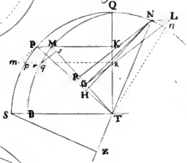
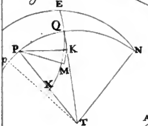


Fig. 12.



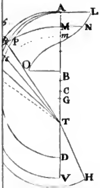


Fig. 16.

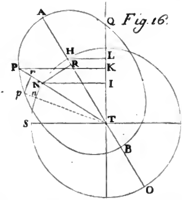


Fig. 19.

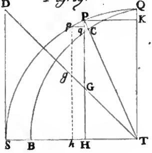


Fig. 21.

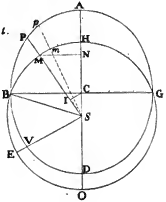


Fig. 23.